

Parábolas, sistemas de ecuaciones y optimización: una interpretación física en ingeniería eléctrica

Parabolas, Systems of Equations and Optimization:
a Physical Interpretation in Electrical Engineering

<https://cientifica.site>

Carlos Antonio **Becerril Gordillo**

Instituto Politécnico Nacional,
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica,
Ciudad de México,
MÉXICO

ORCID: 0000-0002-1598-4634
cbecerril@ipn.mx

Recibido 04/11/2025, aceptado 22/12/2025.



Resumen

En este trabajo se presenta un estudio del análisis de flujos de potencia en un sistema eléctrico simple de dos nodos, mostrando cómo herramientas matemáticas elementales pueden generar interpretaciones físicas significativas. El problema se formula como un sistema de dos ecuaciones no lineales, explorando la existencia y factibilidad de las soluciones del voltaje en el nodo de consumo bajo distintos niveles de demanda. El análisis revela cómo una simple parábola puede actuar como frontera de operación y se propone una formulación alternativa como problema de optimización sin restricciones. En conjunto, el estudio ofrece perspectivas útiles tanto para la enseñanza como para aplicaciones prácticas en ingeniería eléctrica y otras disciplinas.

Palabras clave: flujos de potencia, optimización sin restricciones, funciones de varias variables, enseñanza de la ingeniería eléctrica.

2

Abstract

This paper presents a study of power flow analysis in a simple two-node electrical system, showing how elementary mathematical tools can generate meaningful physical interpretations. The problem is formulated as a system of two nonlinear equations, exploring the existence and feasibility of voltage solutions at the consumption node under different demand levels. The analysis reveals how a simple parabola can act as an operating boundary, and an alternative formulation is proposed as an unconstrained optimization problem. Overall, the study offers useful insights for both teaching and practical applications in electrical engineering and other disciplines.

Index terms: power flow analysis; unconstrained optimization; multivariable functions; electrical engineering education.

I. INTRODUCCIÓN

La importancia de las matemáticas en cualquier área es incuestionable, y en ingeniería esta relevancia se vuelve aún más evidente. Sin embargo, con frecuencia la disciplina se reduce a ejercicios que pueden carecer de significado, dejando un vacío en los esfuerzos de los estudiantes y en la riqueza intelectual que el tema ofrece.

En muchas instituciones académicas en México y el extranjero es común encontrar planes de estudio en ingeniería que incluyen materias básicas durante los primeros años, antes de que los estudiantes se especialicen en su disciplina [1]. En matemáticas, por ejemplo, las ingenierías suelen contemplar asignaturas como álgebra lineal y cálculo de una y varias variables. Aunque estas asignaturas son fundamentales para la formación intelectual y el desarrollo de habilidades cognitivas [2], [3], existe el riesgo de caer en la monotonía, la repetición de temas de niveles previos y/o la falta de conexión con la carrera estudiada. Una alternativa es incluir en las clases –en la medida de lo posible– aplicaciones orientadas a la disciplina cursada.

A modo de ejemplo, en una materia de matemáticas de la carrera de ingeniería eléctrica, decir que una ecuación cuadrática modela el movimiento de un balón o proyectil podría resultar repetitivo y poco motivante. En cambio, mostrar que esa misma ecuación puede modelar el riesgo de un apagón en una región del país ayuda a despertar el interés y a resaltar la relevancia de las matemáticas para su disciplina

Este trabajo está dirigido principalmente a profesores que imparten la materia de cálculo de una variable y de varias variables en la carrera de ingeniería eléctrica y a sus estudiantes, e incluso a estudiantes de últimos semestres que deseen recordar la relación de un problema típico de su carrera con las matemáticas que modelan y resuelven este problema. Desde luego que esto no excluye a la demás gente interesada en una aplicación real de algunos conceptos matemáticos que regularmente se tratan a nivel ingeniería.

El ejemplo y datos del trabajo se encuentran basados en el artículo de T. J. Overbye [4], motivando así a los docentes no solo a relacionar trabajos de investigación importantes con conceptos de uso cotidiano en las aulas, sino también a desarrollarlos en trabajos escritos o, lo que es más importante, integrarlos en las clases. Desde luego que se exhorta a realizar trabajo colaborativo en los cuerpos docentes entre matemáticos e ingenieros para establecer una sinergia que permita conseguir lo anterior. De cualquier forma, y con el afán de que no se requiera ser un experto en el área para leer el trabajo, éste se ha desarrollado sobre una metodología en la que:

- Se describe el problema, el objetivo y la necesidad de resolverlo.
- Se plantean las ecuaciones que describen el fenómeno de forma general.
- Se construye el modelo que se debe resolver a partir de los datos proporcionados.

Finalmente, a partir de ahí, se muestra cómo las matemáticas “de siempre” son útiles para resolver el modelo y para dar significados reales en un problema de ingeniería eléctrica.

Esto se ha pensado también con la finalidad de que los profesores del área de matemáticas puedan sacar provecho de los conceptos que aquí se aplican y que han mostrado en clase, como: *sistemas de ecuaciones, solución de ecuaciones cuadráticas, funciones vectoriales, funciones de varias variables, curvas de nivel, gradientes, puntos críticos, criterio de las segundas derivadas parciales* y su generalización como *matriz Hessiana*, entre otros. Lo anterior, sin la necesidad de entrar en los detalles técnicos de la aplicación.

Corresponderá a los estudiantes replicar los cálculos y profundizar en los conceptos eléctricos y matemáticos que aquí se plantean. También, y sin dejar de lado la belleza intrínseca de las matemáticas, se les anima a repensar en la importancia de esta disciplina, así como imaginar las posibilidades infinitas de aplicación en los demás temas que han estudiado, y tener esta misma perspectiva con aquellos temas que aún tienen por estudiar.

II. PLANTEAMIENTO Y MODELADO DEL PROBLEMA

En la Fig. 1 se muestra un pequeño sistema eléctrico de potencia que consta de dos nodos. En el nodo 1, se tiene un generador con capacidad suficiente para alimentar a un poblado que representa un punto de consumo en el nodo 2; ambos puntos están conectados mediante una línea de transmisión, encargada de transportar la energía desde el punto de generación hasta el nodo 2, donde será consumida por la carga.

El voltaje en un nodo k de un sistema eléctrico se puede expresar como un *número complejo*, que en forma rectangular se escribe como $v_k = x_k + jy_k$, donde x_k e y_k son números reales [5]; por ejemplo, el voltaje en el nodo 2 del sistema de la Fig. 1 se escribe como $v_2 = x_2 + jy_2$.

Un problema típico de ingeniería eléctrica para un sistema de dos nodos como el de la Fig. 1, y el objetivo del estudio que se realizará en este trabajo, es **conocer el voltaje en el punto de consumo, v_2 , cuando se demanda cierta cantidad de potencia real P_2^D y reactiva Q_2^D en dicho nodo**. En el Apéndice A se presenta una discusión sobre la importancia de mantener el voltaje en niveles adecuados, que quizá esté más dirigida a estudiantes de ingeniería eléctrica a partir de los semestres intermedios; sin embargo, los estudiantes de los primeros semestres o quienes provengan de otras áreas del conocimiento pueden enfocarse en las deducciones e implicaciones matemáticas de los efectos ahí descritos.

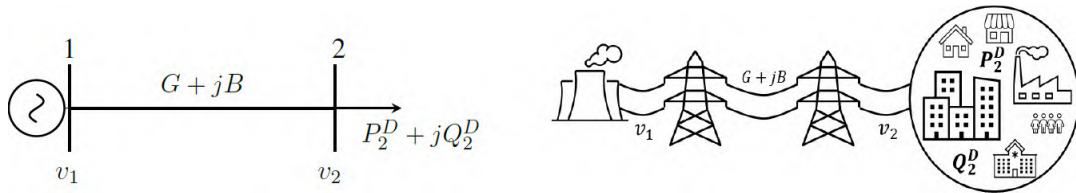


Fig. 1. Sistema de potencia de dos nodos (diagrama unifilar y representación real equivalente).

Las ecuaciones que permiten conocer la relación entre las inyecciones netas de potencia y los voltajes en un sistema eléctrico de potencia con n nodos, se conocen como *ecuaciones de flujos de potencia*, y en su forma rectangular se encuentran dadas por [5], [6]:

$$P_k = \sum_{l=1}^n [x_k(x_l G_{kl} - y_l B_{kl}) + y_k(y_l G_{kl} + x_l B_{kl})], \quad (1)$$

$$Q_k = \sum_{l=1}^n [y_k(x_l G_{kl} - y_l B_{kl}) - x_k(y_l G_{kl} + x_l B_{kl})],$$

donde k indica el índice de cada nodo, excepto el de referencia. En este caso, el nodo de referencia es el nodo 1, de modo que este índice solo comprende el nodo de carga, así que $k = 2$. P_k y Q_k indican la potencia activa y reactiva neta inyectada al nodo y dependen de las inyecciones de generación de potencias real y reactiva, dadas por P_k^G y Q_k^G , y de las extracciones (demanda) de potencias real y reactiva, P_k^D y Q_k^D . Estas magnitudes se relacionan, para el caso $k = 2$, como sigue [5]:

$$\begin{aligned} P_2 &= P_2^G - P_2^D, \\ Q_2 &= Q_2^G - Q_2^D. \end{aligned} \quad (2)$$

Por su parte, tanto G como B son la componente real e imaginaria de elementos de una matriz que se construye con los parámetros de la red, en este caso, los parámetros de la única línea de transmisión¹.

El desarrollo de las ecuaciones del sistema (1) es:

$$\begin{aligned} P_2 &= [x_2(x_1 G_{21} - y_1 B_{21}) + y_2(y_1 G_{21} + x_1 B_{21})] + [x_2(x_2 G_{22} - y_2 B_{22}) + y_2(y_2 G_{22} + x_2 B_{22})], \\ Q_2 &= [y_2(x_1 G_{21} - y_1 B_{21}) - x_2(y_1 G_{21} + x_1 B_{21})] + [y_2(x_2 G_{22} - y_2 B_{22}) - x_2(y_2 G_{22} + x_2 B_{22})]. \end{aligned} \quad (3)$$

5

Note que el conjunto de ecuaciones (3) forma un sistema no-lineal de dos ecuaciones con dos incógnitas, x_2 e y_2 , que son la parte real e imaginaria del voltaje en el nodo de consumo, respectivamente. Es decir, al resolver ese sistema de ecuaciones no lineales, estaremos encontrando el valor del voltaje en el nodo 2, para cierta cantidad de potencia real y reactiva, lo cual constituye el objetivo principal del estudio conocido como *problema de flujos de potencia*.

Para estudiar el comportamiento del voltaje ante diferentes niveles de demanda, se considerará un escenario de baja demanda, otro intermedio y un tercer escenario que modele una alta demanda [4], como se muestra en la Tabla 1:

TABLA 1. ESCENARIOS.

Escenario	Demanda
Baja,	$P_2^D = 200 \text{ MW}, Q_2^D = 100 \text{ Mvar}.$
Intermedia,	$P_2^D = 300 \text{ MW}, Q_2^D = 150 \text{ Mvar}.$
Alta,	$P_2^D = 400 \text{ MW}, Q_2^D = 200 \text{ Mvar}.$

Por su parte, el voltaje en el nodo de referencia estará dado por $v_1 = x_1 + jy_1 = 1.0 + j0.0$ y el valor de la reactancia de la línea de transmisión en *por unidad* (*pu*) será de 0.1 (potencia base de 100 MVA).

Consideraciones en la notación. Al tener como único punto de interés el nodo de consumo, y por simplicidad en la notación, en lo subsecuente se usará x e y en lugar de x_2 e y_2 , y P y Q en lugar de P_2 y Q_2 .

¹ A esta matriz se le conoce como matriz de admitancias nodal Y_{bus} , y su desarrollo se encuentra en el Apéndice B.

III. SISTEMAS NO LINEALES: SOLUCIONES Y SU INTERPRETACIÓN FÍSICA

Los sistemas de ecuaciones en ingeniería son de uso cotidiano, en este caso, el conjunto de ecuaciones (3) forman un sistema de ecuaciones no-lineales que puede ser resuelto por medio de sustitución debido a que una de las dos ecuaciones es lineal, tal como se verá a continuación.

A. *DEMANDA BAJA*: $P_2^D = 200 \text{ MW}$ y $Q_2^D = 100 \text{ Mvar}$

Normalizando la demanda a valores por unidad con la base de 100 MVA y considerando las ecuaciones (2), las potencias netas en el nodo de carga son: $P = -2.0$ y $Q = -1.0$ (no hay inyección local de potencias, P_2^G y Q_2^G).

Usando los valores de las componentes de los elementos de la matriz de admitancias dados en el Apéndice B y sabiendo que $x_1 = 1.0$ e $y_1 = 0.0$ (componentes del voltaje en el nodo de referencia), las ecuaciones (3) quedan:

$$2 = -10y \quad (4)$$

$$1 = 10x - 10y^2 - 10x^2 \quad (5)$$

De la ecuación (4):

$$y = -\frac{1}{5} \quad (6)$$

Sustituyendo esto en (5) y reordenando:

$$50x^2 - 50x + 7 = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática se tiene:

$$x^{(1)} = \frac{5 - \sqrt{11}}{10} \quad \text{y} \quad x^{(2)} = \frac{5 + \sqrt{11}}{10} \quad (7)$$

Combinando (6) y (7) se tiene que las soluciones del sistema de ecuaciones no lineales (4) y (5) son:

$$\left(\frac{5 - \sqrt{11}}{10}, -\frac{1}{5}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{5 + \sqrt{11}}{10}, -\frac{1}{5}\right) \quad (8)$$

Es decir, el voltaje en el nodo de consumo podría tomar alguno de los dos valores obtenidos:

$$v_2^{(1)} = 0.1683 - j0.2 \quad \text{o} \quad v_2^{(2)} = 0.8317 - j0.2$$

Bajo estas condiciones, la solución esperada en operación real es aquella en donde la magnitud del voltaje esté cercana a 1 pu y el ángulo de desfase respecto al nodo de referencia no sea demasiado grande, o podría haber problemas físicos que se explican en el Apéndice A.

En forma polar, los voltajes obtenidos son:

$$v_2^{(1)} = 0.26\angle -49.91^\circ \quad \text{o} \quad v_2^{(2)} = 0.86\angle -13.52^\circ$$

de modo que la solución esperada en el escenario de baja demanda es $v_2^{(2)}$.

B. DEMANDA MEDIA: $P_2^D = 300 \text{ MW}$ y $Q_2^D = 150 \text{ Mvar}$

Considere que la demanda en el punto de consumo crece en un 50 % de su valor original, entonces el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} 3 &= -10y, \\ 1.5 &= 10x - 10y^2 - 10x^2 \end{aligned}$$

Procediendo como en el escenario de baja demanda, las soluciones de este sistema de ecuaciones no lineales son:

$$\left(\frac{2}{5}, -\frac{3}{10}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{3}{5}, -\frac{3}{10}\right) \quad (9)$$

Es decir, el voltaje en el nodo de consumo podría tomar alguno de los siguientes valores obtenidos:

$$v_2^{(1)} = 0.4 - j0.3 \quad \text{o} \quad v_2^{(2)} = 0.6 - j0.3$$

En forma polar:

$$v_2^{(1)} = 0.5\angle -36.87^\circ \quad \text{o} \quad v_2^{(2)} = 0.67\angle -26.57^\circ$$

Aunque ambas soluciones no son satisfactorias en términos de magnitud, en este escenario de demanda intermedia, $v_2^{(2)}$ representaría la solución física más deseable.

C. DEMANDA ALTA: $P_2^D = 400 \text{ MW}$ y $Q_2^D = 200 \text{ Mvar}$

Con un crecimiento del 100 % del valor original de la demanda, el sistema de ecuaciones queda:

$$\begin{aligned} 4 &= -10y \\ 2 &= 10x - 10y^2 - 10x^2 \end{aligned}$$

y en este caso las soluciones de este sistema de ecuaciones no lineales son:

$$\left(\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{11}}{10}, -\frac{2}{5}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{11}}{10}, -\frac{2}{5}\right) \quad (10)$$

Note que en ambas soluciones, el resultado para la parte real del voltaje v_2 es un número complejo (representado mediante una unidad imaginaria distinta por claridad notacional). Sin embargo, esto no implica un cambio de campo algebraico considerado, sino la ausencia de una solución físicamente realizable, lo que indica que la demanda de potencia es demasiado alta o que la reactancia de la línea es insuficiente para sostener el flujo de potencia, lo cual llevaría, en cualquier caso, a un colapso del sistema².

IV. LA PARÁBOLA COMO FRONTERA DE OPERACIÓN

En el escenario de demanda alta resuelto en la sección anterior, se observa que las soluciones reales para el voltaje dejan de existir, poniendo en riesgo la sana operación del sistema eléctrico. El patrón de demanda que generó esta situación fue $(P_2^D, Q_2^D) = (400, 200)$. Dado este hallazgo, es válido preguntar: ¿qué sucede, por ejemplo, con la distribución $(200, 400)$? ¿Existe algún otro caso de demanda que provoque un resultado similar? Si es así, ¿cuántos, y más aún, cuáles combinaciones (P_2^D, Q_2^D) podrían comprometer la operación del sistema?

Con el fin de responder a las preguntas anteriores, se puede plantear el mismo sistema de ecuaciones no lineales, considerando la demanda como un par de parámetros que pueden asumir cualquier combinación de valores. De esta manera, es posible explorar para qué valores de (P_2^D, Q_2^D) se obtiene una solución físicamente factible. Así, se tiene el siguiente sistema de ecuaciones no lineales:

$$P = -10y \quad (11)$$

$$Q = 10x - 10y^2 - 10x^2 \quad (12)$$

Siguiendo el procedimiento de sustitución descrito en el escenario de demanda baja, se despeja y de la ecuación (11) en función de P , obteniéndose:

$$y = -\frac{P}{10} \quad (13)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (12):

$$Q = 10x - \frac{P^2}{10} - 10x^2$$

Reescribiendo la expresión anterior como una ecuación cuadrática de x :

$$-10x^2 + 10x - \left(Q + \frac{P^2}{10}\right) = 0$$

Resolviendo:

$$x^{(1,2)} = \frac{10 \pm \sqrt{100 - 40Q - 4P^2}}{20} \quad (14)$$

² Sólo al introducir simultáneamente unidades imaginarias no equivalentes –por ejemplo, al considerar extensiones algebraicas como los números bicomplejos o los cuaterniones– se accede a estructuras algebraicas más generales [7], [8].

Combinando (13) y (14), se tiene que las soluciones del sistema de ecuaciones no-lineales (11) y (12) son:

$$\left(\frac{10 + \sqrt{100 - 40Q - 4P^2}}{20}, -\frac{P}{10} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{10 - \sqrt{100 - 40Q - 4P^2}}{20}, -\frac{P}{10} \right)$$

Note que ahora la naturaleza de la solución para x (la parte real del voltaje) dependerá del valor del discriminante $100 - 40Q - 4P^2$, el cual definirá una región en donde el sistema de ecuaciones tendrá o no soluciones reales (Tabla 2).

TABLA 2
CLASIFICACIÓN DE SOLUCIONES EN FUNCIÓN DE P Y Q .

Condición	Soluciones	Escenario de demanda
$100 - 40Q - 4P^2 > 0$	Reales y distintas	Baja y media
$100 - 40Q - 4P^2 < 0$	Complejas	Alta

En caso de que $100 - 40Q - 4P^2 = 0$, las soluciones del sistema de ecuaciones (11)-(12) serán reales e iguales³. Esta estructura de soluciones reales e iguales se puede escribir como:

$$Q = -\frac{P^2}{10} + 2.5 \quad (15)$$

9

Esta ecuación cuadrática (15) forma una frontera que divide las soluciones reales de las complejas. En efecto, esa simple parábola invertida representa la frontera entre la solubilidad y la no-solubilidad (posible apagón) del problema estudiado (Fig. 2).

Con la finalidad de evitar la región donde no hay soluciones reales para el problema y que se reduzca el margen de estabilidad por el abatimiento significativo del voltaje, es muy importante monitorear de forma constante la distancia del punto de demanda actual de operación, a la curva que marca la frontera dada por la ecuación (15).

V. SOLUCIÓN COMO UN PROBLEMA DE OPTIMIZACIÓN

Una formulación alternativa al problema planteado en este trabajo es por medio de un problema de optimización de una función de varias variables sin restricciones [4], en el cual se busquen los puntos críticos que hacen que la función sea mínima e indiquen la calidad de la solución.

³ Para obtener un par de valores que hagan cumplir la ecuación, basta con fijar un valor para P , por ejemplo $P = 3$ y resolver para Q , que en este caso resulta en $Q = 1.6$. Se puede comprobar que ahora el sistema de ecuaciones tiene la solución $x = 0.5$, $y = 0.3$.

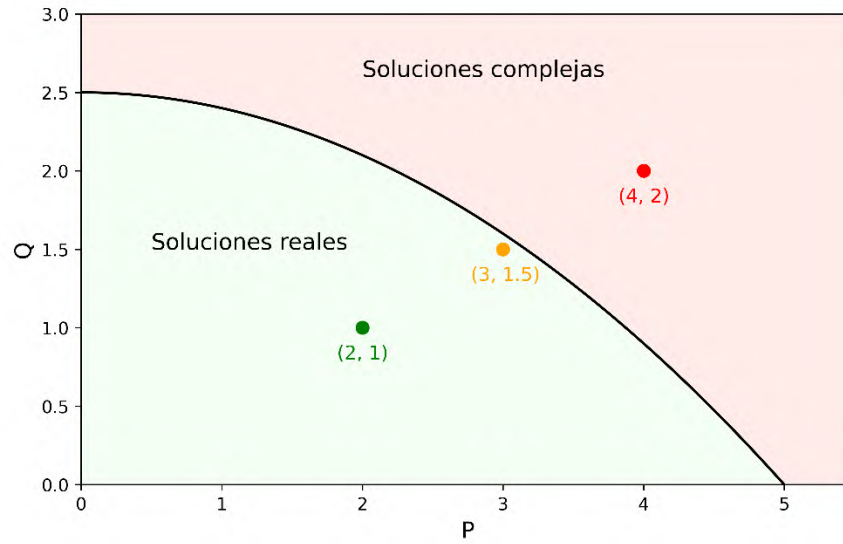


Fig. 2. Frontera de solubilidad en el plano $P - Q$.

Si se compacta a las demandas P y Q en un vector \mathbf{S} y a las funciones $f_1(x, y) = -10y$ y $f_2(x, y) = 10x - 10y - 10x^2$ en un vector \mathbf{f} :

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} P \\ Q \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) \\ f_2(x, y) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -10y \\ 10x - 10y - 10x^2 \end{bmatrix}.$$

Con lo anterior, el sistema de dos ecuaciones no lineales con dos incógnitas formado por (11) y (12) se puede escribir como:

$$\mathbf{S} = \mathbf{f}(\mathbf{x}) \quad (16)$$

en donde, $\mathbf{x} = [x, y]^T$ es el vector de incógnitas que contiene la componente real (x) e imaginaria (y) del voltaje en el nodo de consumo.

Si la ecuación (16) se escribe como $\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{S} = \mathbf{0}$, se puede definir al lado izquierdo de ésta como una función residual, $\mathbf{r}(x, y)$, es decir:

$$\mathbf{r}(x, y) = \mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{S} = \begin{bmatrix} f_1(x, y) - P \\ f_2(x, y) - Q \end{bmatrix} \quad (17)$$

Esta función indicaría si la solución encontrada (x, y) es capaz de satisfacer la demanda. Por ejemplo, en la expresión (8) se muestran las soluciones obtenidas para el caso en el que $P = 2$ y $Q = 1$. Evaluando cualquier solución de (8) en f_1 y f_2 , se tiene que:

$$f_1\left(\frac{5-\sqrt{11}}{10}, -\frac{1}{5}\right) = 2 \quad \text{y} \quad f_2\left(\frac{5-\sqrt{11}}{10}, -\frac{1}{5}\right) = 1$$

lo que significa que, en el escenario de baja demanda:

$$f_1(x, y) - P = 0 \quad y \quad f_2(x, y) - Q = 0$$

o lo que es lo mismo:

$$\mathbf{r}_{\text{Baja}} = [0, 0]^T$$

Haciendo lo propio con los otros dos escenarios, la función residual queda:

$$\mathbf{r}_{\text{Media}} = [0, 0]^T, \quad \mathbf{r}_{\text{Alta}} = [0, -1.1]^T$$

Note que para los escenarios 1 y 2, las soluciones satisfacen la demanda tanto para P como para Q . Sin embargo, en \mathbf{r}_{Alta} se observa que con la configuración actual del sistema no es posible suministrar la potencia reactiva Q requerida en el nodo de carga, lo cual podría deberse a una limitación en la capacidad de generación de potencia reactiva del nodo generador o a restricciones impuestas por la impedancia de la línea de transmisión.

Analizando lo anterior, parece razonable plantearse la búsqueda de los valores de x y y que hacen que la diferencia dada por la función residual sea mínima en cada componente, esperando hacer cumplir (16). Con esta idea, se puede definir el siguiente problema de minimización sin restricciones de la función de error cuadrático⁴ [4]:

$$\min_{\mathbf{x}} F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} \|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{S}\|^2 \quad (18)$$

Desarrollando (18) se obtiene una función de dos variables dada por:

$$F(\mathbf{x}) = \frac{1}{2} [(-10y - P)^2 + (10x - 10y^2 - 10x^2 - Q)^2] \quad (19)$$

A. PUNTOS CRÍTICOS

Se sabe que, si una función de varias variables sin restricciones como (19) tiene un extremo local en un punto, entonces ese punto es un punto crítico [9], [10], lo que significa que:

$$\nabla F(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \end{bmatrix} = \mathbf{0} \quad (20)$$

Para el *escenario de baja demanda* ($P = 2$ y $Q = 1$), el sistema de ecuaciones que resulta de (20) es:

$$\begin{aligned} (10x - 10y^2 - 10x^2 - 1)(10 - 20x) &= 0 \\ 2 + 12y - 20xy + 20x^2y + 20y^3 &= 0 \end{aligned}$$

⁴ En el Apéndice C se puede consultar la deducción de esta expresión para la función objetivo.

Para el *escenario de demanda media* ($P = 3$ y $Q = 1.5$):

$$\begin{aligned}(10x - 10y^2 - 10x^2 - 1.5)(10 - 20x) &= 0 \\ 3 + 13y - 20xy + 20x^2y + 20y^3 &= 0\end{aligned}$$

Para el *escenario de demanda alta* ($P = 4$ y $Q = 2$):

$$\begin{aligned}(10x - 10y^2 - 10x^2 - 2)(10 - 20x) &= 0 \\ 4 + 14y - 20xy + 20x^2y + 20y^3 &= 0\end{aligned}$$

Las soluciones para cada sistema son las que se obtuvieron en la sección anterior y están dadas por los pares de puntos (8), (9) y (10), respectivamente.

Por otro lado, la generalización del sistema de ecuaciones no lineales en el espacio de parámetros $P - Q$ que resulta de (20), está dado por:

$$(10x - 10y^2 - 10x^2 - Q)(10 - 20x) = 0 \quad (21)$$

$$P + (10 + 2Q)y - 20xy + 20x^2y + 20y^3 = 0 \quad (22)$$

Para resolver el sistema (21)-(22), se observa que (21) se satisface siempre que alguna de las siguientes dos situaciones se cumpla:

$$10x - 10y^2 - 10x^2 - Q = 0 \quad \text{o} \quad 10 - 20x = 0$$

– Considerando la primera opción, si

$$10x - 10y^2 - 10x^2 - Q = 0$$

entonces:

$$10x - 10x^2 - 10y^2 = Q \quad (23)$$

Sustituyendo esto en la ecuación (22), se obtiene:

$$P + 10y = 0$$

Por lo que:

$$y = -\frac{P}{10} \quad (24)$$

Sustituyendo en (23), y luego de reacomodar y simplificar se llega a:

$$x^2 - x + \frac{Q + \frac{P^2}{10}}{10} = 0$$

Resolviendo la ecuación cuadrática:

$$x^{(1,2)} = \frac{1 \pm \sqrt{1 - 4 \left(\frac{Q + \frac{P^2}{10}}{10} \right)}}{2} \quad (25)$$

Combinando (24) con (25), los puntos críticos de la función para esta primera situación son:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{10} \left(Q + \frac{P^2}{10} \right)}}{2}, -\frac{P}{10} \right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{10} \left(Q + \frac{P^2}{10} \right)}}{2}, -\frac{P}{10} \right) \quad (26)$$

Estos son los valores de (x, y) donde la función alcanza su mínimo, siempre que la condición sobre la raíz cuadrada sea válida, y la región será válida si el discriminante:

$$1 - \frac{4}{10} \left(Q + \frac{P^2}{10} \right) \geq 0$$

que se cumple siempre que:

$$Q \leq -\frac{P^2}{10} + 2.5$$

Esta expresión representa una región en el plano $P - Q$ debajo de la parábola, dada por la ecuación:

$$Q = -\frac{P^2}{10} + 2.5$$

que es la misma ecuación frontera dada por (15).

- Considerando la segunda opción, si

$$10 - 20x = 0$$

entonces se obtiene de forma directa que:

$$x = \frac{1}{2} \quad (27)$$

Por otro lado, el valor de Q dado por (23) genera el resultado para y vía la ecuación (22), de modo que, sustituyendo (27) en (23) y resolviendo para y se obtiene:

$$y = \pm \sqrt{\frac{2.5 - Q}{10}} \quad (28)$$

Es decir, combinando (27) y (28), otro par de puntos críticos de la función son:

$$\left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2.5-Q}{10}}\right) \quad \text{y} \quad \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{2.5-Q}{10}}\right) \quad (29)$$

Note que en este caso la parte imaginaria del voltaje depende directamente de Q , y que para que la solución sea real se debe cumplir que $Q \leq 2.5$, en caso contrario, el sistema no puede operar en este punto crítico con el flujo de potencia reactiva especificado.

En resumen, existen cuatro puntos críticos para la función, dados por las expresiones (26) y (29), que por comodidad se reescriben a continuación:

$$\left(\frac{1 + \sqrt{1 - \frac{4}{10}\left(Q + \frac{P^2}{10}\right)}}{2}, -\frac{P}{10}\right), \left(\frac{1 - \sqrt{1 - \frac{4}{10}\left(Q + \frac{P^2}{10}\right)}}{2}, -\frac{P}{10}\right), \left(\frac{1}{2}, \sqrt{\frac{2.5-Q}{10}}\right) \text{ y } \left(\frac{1}{2}, -\sqrt{\frac{2.5-Q}{10}}\right) \quad (30)$$

B. MATRIZ HESSIANA (CRITERIO DE LAS SEGUNDAS DERIVADAS PARCIALES)

La matriz hessiana H es una matriz cuadrada que contiene todas las segundas derivadas parciales de una función de varias variables, y permite identificar si los puntos críticos obtenidos son máximos, mínimos o puntos silla en problemas de optimización sin restricciones, como el que se presenta ahora. La matriz hessiana de una función $f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ de n variables, es una matriz de orden $n \times n$ que se define como [10], [11]:

$$H(f) = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1} & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_2} & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} \end{bmatrix}$$

La condición que debe cumplir un punto crítico (x_1, x_2, \dots, x_n) para que sea un mínimo local es que la Hessiana sea una *matriz definida positiva*; es decir, que todos sus menores principales superiores izquierdos tengan determinante positivo [10], [11].

Para una función de dos variables $F(x, y)$, la Hessiana es:

$$H(F) = \begin{bmatrix} F_{xx} & F_{xy} \\ F_{yx} & F_{yy} \end{bmatrix}$$

El criterio de definitud se simplifica entonces a:

- El determinante de la Hessiana debe ser positivo: $\det H(F) > 0$.
- El primer menor principal (el primer elemento de la diagonal), F_{xx} , es positivo: $F_{xx} > 0$.

Esto corresponde al *criterio de las segundas derivadas parciales*, que dice [9]: “Dado el punto crítico (a, b) , para buscar los extremos relativos de F , considérese la cantidad

$$d = F_{xx}(a, b) F_{yy}(a, b) - [F_{xy}(a, b)]^2$$

Si $d > 0$ y $F_{xx}(a, b) > 0$, entonces F tiene un **mínimo local** en (a, b) .”

Note que $d > 0$ es la condición del determinante de la Hessiana, mientras que $F_{xx}(a, b) > 0$ es el valor del primer menor principal.

Los demás criterios son: Si $d > 0$ y $F_{xx}(a, b) < 0$, entonces F tiene un **máximo local** en (a, b) . Si $d < 0$, entonces F tiene un **punto silla** en (a, b) . Si $d = 0$, el criterio no lleva a **ninguna conclusión**.

De esta forma, la matriz hessiana de la función $F(x)$ dada en (19), queda:

$$H = \begin{bmatrix} (10 - 20x)^2 - 20(10x - 10y^2 - 10x^2 - Q) & -20y(10 - 20x) \\ -20y(10 - 20x) & 100 + 400y^2 - 20(10x - 10y^2 - 10x^2 - Q) \end{bmatrix}$$

Para el *escenario de baja demanda* ($P = 2$ y $Q = 1$), los puntos críticos obtenidos en (30) son:

$$(0.832, -0.2), (0.168, -0.2), (0.5, 0.387) \text{ y } (0.5, -0.387).$$

Analizando $(0.832, -0.2)$, la matriz hessiana queda:

$$H(0.832, -0.2) = \begin{bmatrix} 44.1344 & -26.56 \\ -26.56 & 116.0448 \end{bmatrix}$$

Como el determinante de la matriz hessiana, $\det(H) = 4416.1340 > 0$, y el primer menor principal $H_{11}(0.832, -0.2) = 44.1344 > 0$, se concluye que el punto $(0.832, -0.2)$ es un *mínimo local*. El valor mínimo en este punto crítico es $F(0.832, -0.2) = 2.5088 \times 10^{-6}$. Este punto crítico $(0.832, -0.2)$ es la solución $v_2^{(2)}$ obtenida en la sección III-A.

En la Tabla 3 se muestra un resumen de resultados para el escenario de demanda baja en cada uno de los puntos críticos; se invita a verificar estos cálculos y a completar la tabla para los demás escenarios.

TABLA 3
ANÁLISIS DE LOS PUNTOS CRÍTICOS PARA EL ESCENARIO DE DEMANDA BAJA.

Punto crítico	$\det(H)$	H_{11}	Evaluación de f	Conclusión
$(0.832, -0.2)$	4416.1340	44.1344	2.5088e-06	Mínimo
$(0.168, -0.2)$	4416.1340	44.1344	2.5088e-06	Mínimo
$(0.5, 0.387)$	-7.3856	-4.62e-02	17.2285	Punto silla
$(0.5, -0.387)$	-7.3856	-4.62e-02	1.7485	Punto silla

Finalmente, en las Fig. 3, 4 y 5 se muestran tanto la superficie como las curvas de nivel de la función (19) para los tres escenarios estudiados.

Las curvas indican el valor de la función objetivo (error cuadrático, que tiene que ver con la calidad de las soluciones encontradas) en el espacio de los valores de las componentes real e imaginaria x e y del voltaje en el nodo de carga. En cada línea de contorno mostrada se puede encontrar la pareja x, y para la cual el valor del error cuadrático es exactamente el mismo. Es decir, las curvas de nivel permiten identificar valores constantes de z para un conjunto de puntos (x, y) .

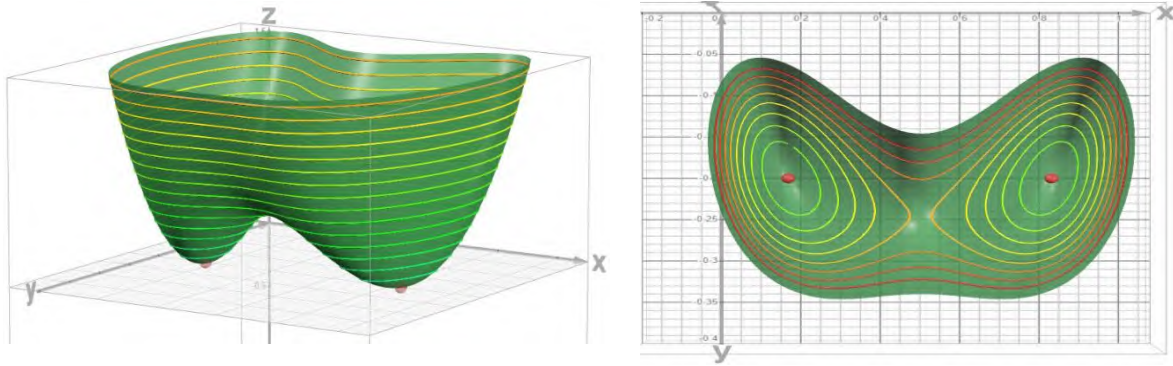


Fig. 3. Superficie y curvas de nivel para $P = 2$ y $Q = 1$.

16

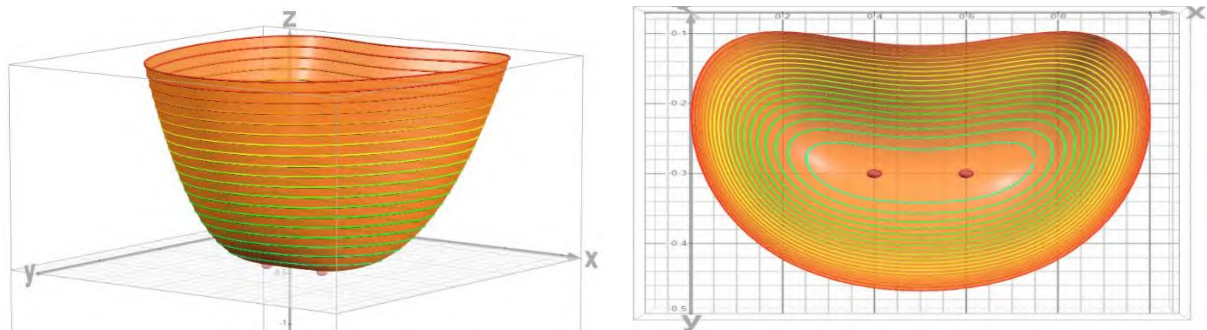


Fig. 4. Superficie y curvas de nivel para $P = 3$ y $Q = 1.5$.

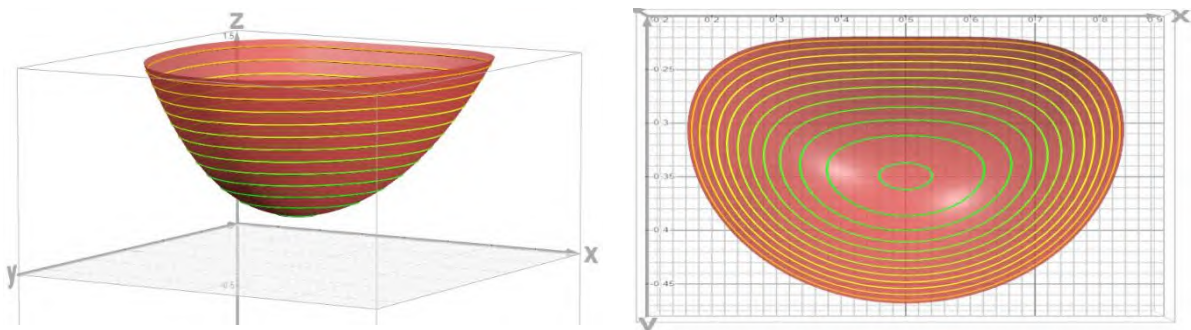


Fig. 5. Superficie y curvas de nivel para $P = 4$ y $Q = 2$.

VI. COMPARACIÓN DE ENFOQUES: SISTEMAS NO LINEALES VS. OPTIMIZACIÓN

Al comparar los dos enfoques aplicados en este trabajo –el sistema de ecuaciones no lineales y la formulación de optimización– se observa una aparente disparidad: mientras que desde la perspectiva de ecuaciones no lineales puede no existir solución real, la formulación de optimización siempre entrega un mínimo de la función de error, incluso cuando no se cumplen exactamente las ecuaciones originales.

Esto se debe a que la función $F(x, y)$ representa el error cuadrático asociado a las ecuaciones no lineales (11)-(12), cuantificando qué tan cerca está un par (x, y) de satisfacer el balance de potencias. En ausencia de solución exacta, el mínimo de $F(x, y)$ indica la *mejor aproximación posible* dentro de las restricciones del sistema.

Por ejemplo, para $P = 4, Q = 2$:

- El sistema de ecuaciones no lineales no tiene solución real: al sustituir $y = -\frac{P}{10} = -0.4$ en (12), el discriminante asociado es negativo.
- Sin embargo, al minimizar $F(x, y)$, se encuentra un mínimo global, lo cual significa que en la pareja (x, y) encontrada, el error es el menor posible, aunque no se satisfagan de forma exacta ambas ecuaciones no lineales de las que se parte.

En la Tabla 4 se muestra la comparación entre ambos enfoques.

TABLA 4.
COMPARACIÓN ENTRE EL ENFOQUE DE SOLUCIÓN EXACTA Y EL ENFOQUE DE OPTIMIZACIÓN.

Enfoque	Objetivo	Existencia de soluciones
Sistema no lineal.	Encontrar (x, y) tal que se cumplan de forma exacta las ecuaciones de balance.	No existe solución real si el sistema es inconsistente (por ejemplo, discriminante negativo).
Optimización.	Encontrar (x, y) tal que se minimice el error cuadrático en las ecuaciones de balance.	Siempre existe mínimo, aunque el error no sea cero.

VII. CONCLUSIONES

Este estudio demuestra cómo conceptos matemáticos aparentemente sencillos pueden ofrecer interpretaciones físicas significativas en un problema de la ingeniería eléctrica. Por ejemplo:

- Se evidenció cómo una *parábola* puede funcionar como frontera de operación, separando las soluciones físicamente posibles de aquellas inviables, lo que además se convierte en recurso visual para comprender esos límites de operación.
- También se mostró que la formulación como *sistema de ecuaciones no lineales* permite identificar directamente soluciones exactas y detectar casos en los que la demanda no es sostenible.
- Por otra parte, la reformulación como un problema de optimización ofrece, en cambio, un mínimo de error cuadrático incluso cuando no existen soluciones exactas, proporcionando así una aproximación útil y continua del comportamiento del sistema.

Finalmente, se plantea que incorporar estos enfoques en la enseñanza podría ayudar a los estudiantes a vincular los conceptos abstractos con problemas reales, lo que potencialmente incrementaría su motivación y comprensión profunda de la materia.

APÉNDICE A

IMPORTANCIA DE UN NIVEL CORRECTO DE VOLTAJE

Aunque el sistema considerado en este estudio es un esquema simplificado de dos nodos, la necesidad de mantener el voltaje en el nodo de consumo dentro de márgenes adecuados (por ejemplo, $\pm 5\%$ respecto al valor nominal) refleja una situación real en la operación de sistemas eléctricos. En el caso específico del sistema de potencia de dos nodos aquí estudiado (Fig. 1), se pueden presentar fenómenos de:

- **Bajo voltaje:**
 - **Pérdidas en la línea.** La potencia activa consumida en el nodo de carga P_2^D , depende del voltaje y corriente en ese punto, de acuerdo con:

$$P_2^D = |v_2| |I_2| \cos \theta$$

donde θ es el ángulo de desfase entre el voltaje y la corriente en el nodo. Si el voltaje $|v_2|$ disminuye, la demanda de corriente $|I_2|$ debe aumentar para mantener el mismo nivel de potencia activa P_2^D demandada (asumiendo que el ángulo θ se mantiene aproximadamente constante). Este incremento de corriente genera mayores pérdidas en la línea por efecto Joule, modeladas por:

$$P_{\text{pérdidas}} = |I_2|^2 R$$

donde R es la resistencia de la línea.

- **Disminución en la capacidad de transmisión.** El flujo de potencia activa en la línea que une los nodos 1 y 2 está dada por [5]:

$$P_{12} = \frac{|v_1| |v_2|}{X} \sin \delta_{12}$$

donde δ_{12} es el ángulo de desfase entre los voltajes v_1 y v_2 . Dado que X es la reactancia (fija) de la línea de transmisión y que $|v_1| = 1.0$ (fijo), una disminución en $|v_2|$ reduce el producto $|v_1| |v_2|$, lo que puede llevar a una reducción de la potencia activa transmitida. En esta situación, el sistema podría no ser capaz de suministrar toda la potencia activa requerida por la carga, limitando el suministro de energía.

- **Sobrevoltaje:**
 - **Activación de protecciones.** Algunos dispositivos incluyen protecciones contra sobrevoltaje que los desconectan si el voltaje excede ciertos límites. En instalaciones industriales, un voltaje excesivo puede activar protecciones en motores, afectando así la producción.
 - **Circulación no deseada de reactivos en la red.** El flujo de potencia reactiva en la línea que une los nodos 1 y 2 está dado por [5]:

$$Q_{12} = \frac{|v_1|^2 - |v_1| |v_2| \cos \delta_{12}}{X}$$

Dado que X es fijo y $|v_1| = 1.0$, un aumento en $|v_2|$ puede hacer que el término $|v_1||v_2|\cos\delta_{12}$ se acerque o incluso supere a $|v_1|^2$, haciendo que Q_{12} disminuya o cambie de signo. Esta variación, y en particular el posible cambio de dirección del flujo ($Q_{12} < 0$), puede provocar un reajuste en los niveles y rutas de circulación de la potencia reactiva en el sistema. Si este reajuste recae sobre elementos que no fueron diseñados para absorber o suministrar dicha potencia —como líneas, transformadores o bancos de capacitores en otras zonas—, estos podrían verse forzados a compensar el nuevo flujo, saliéndose de sus condiciones normales de operación.

Por ejemplo, si la potencia reactiva comienza a circular entre otro par de nodos kl incrementando Q_{kl} , se incrementará la corriente en esa línea, ya que [5], [6]:

$$I_{kl} = \frac{\sqrt{P_{kl}^2 + Q_{kl}^2}}{|V_k|}$$

lo cual provoca un aumento en las pérdidas por efecto Joule (ver pérdidas en la línea por bajo voltaje).

- **Pérdidas en la línea.** Las pérdidas por efecto corona están dadas por [6]:

$$P_{12}^{\text{corona}} = |v_{\text{op}}|^2 G_{12}$$

donde G_{12} es la conductancia asociada al efecto corona y $|v_{\text{op}}|$ es el voltaje de operación de la línea. Este voltaje es el nivel al que normalmente opera dicha línea durante condiciones estables, y se refiere al voltaje entre conductores (fase-fase) o entre conductor y tierra (fase-tierra), dependiendo del sistema. En condiciones normales de operación, el voltaje a lo largo de una línea de transmisión suele mantenerse relativamente uniforme, por lo que puede aproximarse al valor medio entre los voltajes en sus extremos, siempre que no existan perturbaciones importantes o caídas de tensión significativas en la línea (condiciones transitorias o de falla).

Entonces, si el nodo de carga presenta un sobrevoltaje ($v_2 \uparrow$), es razonable asumir que la línea también opera a un voltaje elevado, lo que intensifica la ionización del aire alrededor de los conductores y, por lo tanto, incrementa las pérdidas por efecto corona.

APÉNDICE B

CONSTRUCCIÓN DE Y_{BUS}

El sistema de dos nodos de la Fig. 1 consta de una sola línea de transmisión con una impedancia:

$$Z = R + jX = 0.0 + j 0.1 \text{ p.u.}$$

De este modo, la admitancia de la línea es:

$$Y = \frac{1}{Z} = \frac{1}{jX} = -j \frac{1}{0.1} = -j10 \text{ p.u.}$$

La matriz de admitancias nodales tiene la forma [5], [6]:

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix}$$

donde

- Y_{ii} (elementos diagonales) representan la admitancia propia de cada nodo.
- Y_{ij} (elementos fuera de la diagonal) representan la admitancia mutua entre nodos.

La admitancia propia se calcula como suma de las admitancias de las líneas conectadas a él. Como solo hay una línea entre el nodo 1 y el nodo 2, con admitancia $Y = -j10$, se tiene:

$$Y_{11} = -j10 = Y_{22}$$

Por su parte, la admitancia mutua es simplemente el negativo de la admitancia de la línea, es decir:

$$Y_{12} = j10 = Y_{21} = -Y$$

Entonces:

$$Y_{bus} = \begin{bmatrix} G_{11} + jB_{11} & G_{12} + jB_{12} \\ G_{21} + jB_{21} & G_{22} + jB_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 - j10 & 0 + j10 \\ 0 + j10 & 0 - j10 \end{bmatrix}$$

es decir:

$$\begin{array}{cccc} G_{11} = 0 & B_{11} = -10 & G_{12} = 0 & B_{12} = 10 \\ G_{21} = 0 & B_{21} = 10 & G_{22} = 0 & B_{22} = -10 \end{array}$$

20

APÉNDICE C

DEDUCCIÓN DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

Una *función vectorial* es aquella cuya salida es un vector, sin importar si su entrada consiste en uno o varios números reales [9], [10]. La función residual (17) es un ejemplo de función vectorial, recibe dos números reales, x e y , y devuelve un vector de dos componentes, $[r_1, r_2]$.

Esto representa un inconveniente para los métodos de optimización, ya que éstos requieren una función objetivo escalar, es decir, una función cuya salida sea un número real a partir de entradas reales [11]. Dado que la función residual es vectorial, no puede minimizarse directamente; por ello, se define una función equivalente que condense la información de la residual en un solo valor real.

Primero se debe notar que, si $f(x) - S$ es igual al vector cero (0) como sucede con r_{Baja} y r_{Media} , entonces su norma $\|f(x) - S\|$ es igual a cero, pero de los reales (0), y ahora se cuenta con una función *escalar* de varias variables. Tomando este beneficio, se puede plantear el problema como:

$$\min_x \|f(x) - S\|$$

Sin embargo, al igual que la función valor absoluto para funciones de una variable, la norma de una función genera puntos en donde la derivada no existe (picos o puntos angulares desde el punto de vista geométrico) [12]. Esto podría ser un inconveniente para el uso de métodos de optimización numérica que utilizan las derivadas como parte de su algoritmo, como el método del gradiente o el método de Newton [11].

Una alternativa que evita lo anterior surge de la siguiente observación: Si la función $\|f(x) - S\| = 0$ entonces el cuadrado de esa norma también lo es, es decir, $\|f(x) - S\|^2 = 0$. Esta última es ahora una función derivable en todos los puntos y podría definirse como la función objetivo buscada. Sin embargo, la derivada de esta función siempre agregará un 2 en todos los cálculos, el cual podría influir en el desempeño de los métodos de optimización numérica. Para solventar esta última dificultad, se puede agregar el coeficiente $\frac{1}{2}$ a la función objetivo para quedar tal como se definió en el problema de optimización sin restricciones (18) de la sección V:

$$F(x) = \frac{1}{2} \|f(x) - S\|^2$$

Es importante mencionar que esta modificación no afecta a la ubicación de los mínimos, ya que éstos suceden siempre en los puntos en los que el gradiente de la función es cero y el coeficiente no genera cambios en éste.

Para verificar lo anterior, considere que $g(x) = f(x) - S$, y que se define como función objetivo a $G_1(x) = \|g(x)\|^2$, entonces:

$$\begin{aligned} \nabla G_1(x) &= \nabla \|g(x)\|^2 \\ &= \nabla (g^T g) \\ \nabla G_1(x) &= 2g \cdot \nabla g \end{aligned}$$

lo cual se anula siempre que $g \cdot \nabla g = 0$.

Por otro lado, si se define como función objetivo a $G_2(x) = \frac{1}{2} \|g(x)\|^2$, se tiene que:

$$\nabla G_2(x) = g \cdot \nabla g$$

lo cual también se anula cuando $g \cdot \nabla g = 0$.

Es decir, en ambos casos los puntos críticos ocurren cuando $g \cdot \nabla g = 0$, pero en el primer caso persiste un factor 2, mientras que en el segundo no.

Nota: En [4] se usa la expresión:

$$F(x) = \frac{1}{2} [f(x) - S]^T [f(x) - S]$$

en lugar de $F(x) = \frac{1}{2} \|f(x) - S\|^2$. Sin embargo, de las propiedades del producto interno, si v es un vector en R^n , entonces [9], [10]:

$$v^T \cdot v = |v|^2$$

CRedit (Contributor Roles Taxonomy)

Contribuciones de los autores: Autor único.

Financiamiento: El autor declara que no se requirió de adquisición de fondos para este trabajo.

Declaración de disponibilidad de datos: Los datos se encuentran en las referencias citadas en el artículo.

Agradecimientos: El autor agradece profundamente a la profesora Daisy García García, el profesor Miguel Moreno Scoffi y al ingeniero Olivier Tovar Barragán por los comentarios que enriquecieron ampliamente este trabajo. En especial, agradezco a mi estudiante –y futuro ingeniero– Jesús Alberto Hernández Torres por replicar todos los cálculos presentados y por sus valiosas observaciones desde el punto de vista que considero más relevante para la retroalimentación de los profesores: el del alumno. Agradezco igualmente a los revisores su lectura cuidadosa, cuyo aporte fue fundamental para mejorar este trabajo.

Conflicto de interés: El autor declara que no existe conflicto de interés.

REFERENCIAS

- [1] D. M. B. Dermitz, P. M. H. Jones, A. M. Medina, Z. O. Flores, “Análisis comparativo de planes de estudio de licenciaturas en ingeniería,” *Odiseo: Revista electrónica de pedagogía*, 2013, available: <https://odiseo.com.mx/articulos/analisis-comparativo-de-planes-de-estudio-de-licenciaturas-en-ingenieria>
- [2] J. A. F. Bravo, “Neurociencias y enseñanza de la matemática. Prólogo de algunos retos educativos,” *Revista Iberoamericana de Educación*, vol. 51, no. 3, enero 2010.
- [3] E. Rivera-Rivera, “El neuroaprendizaje en la enseñanza de las matemáticas: la nueva propuesta educativa,” *Entorno*, no. 67, pp. 157–168, 2019, available: <https://rieoei.org/RIE/article/view/1832>
- [4] T. J. Overbye, “A power flow measure for unsolvable cases,” *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 9, no. 3, pp. 1359–1365, August 1994.
- [5] J. D. Glover, T. J. Overbye, M. S. Sarma, *Power Systems, Analysis and Design*, 6th ed., Cengage Learning, 2017.
- [6] A. Gómez-Expósito, A. J. Conejo, C. Cañizares, Eds., *Electric Energy Systems: Analysis and Operation*. CRC Press, 2008.
- [7] C. del Buey de Andrés, “Todo es más sencillo con los hipercomplejos,” *La gaceta de la RSME*, vol. 22, no. 1, pp. 145–157, 2019.
- [8] D. C. Struppa, M. E. Luna-Elizarraras, M. Shapiro, A. Vajiac, *Bicomplex holomorphic functions: The algebra, geometry and analysis of bicomplex numbers*, 1st ed., Basel, Switzerland: Birkhauser, 2015.
- [9] R. Larson, B. H. Edwards, *Cálculo 2 de Varias Variables*, 9th ed., McGraw-Hill, 2010.
- [10] J. E. Marsden, A. J. Tromba, *Cálculo Vectorial*, 3rd ed., Addison-Wesley Iberoamericana, 1988.
- [11] E. K. P. Chong, S. H. Zak, *An Introduction to Optimization*, 4th ed., Wiley, 2013.
- [12] R. Larson, B. H. Edwards, *Cálculo*, 9th ed., McGraw-Hill, 2010.