Científica, vol. 28, núm. 1, pp. 01-13, enero-junio 2024, ISSN 2594-2921, Instituto Politécnico Nacional, MÉXICO
https://doi.org/10.46842/ipn.cien.v28n1a01

Construcción de la descomposición de los precios marginales locales

Construction of the Decomposition of Locational Marginal Prices

Carlos Antonio **Becerril Gordillo**

Centro Nacional de Control de Energía, Ciudad de México, MÉXICO
https://orcid.org/0000-0002-1598-4634 | carlos.becerril@cenace.gob.mx

Recibido 14-02-2023, aceptado 15-12-2023.

Resumen

En este trabajo se expone la forma en la que se construye la descomposición de los Precios Marginales Locales (PML) en sus componentes de energía y congestión con el uso del teorema de la envolvente. Los PML es la metodología quizá más ampliamente utilizada alrededor de todo el mundo para determinar precios de la energía, y uno de los conceptos más conocidos de este mecanismo de cierre es su descomposición en la suma de dos o tres componentes, dependiendo del modelo utilizado; sin embargo, el por qué sucede esto no lo es tanto. Es por esto que en este documento se proporciona una justificación formal, pero sencilla de la construcción de tal descomposición.

Palabras clave: precios marginales locales, teorema de la envolvente, despacho económico, mercado eléctrico mexicano.

Abstract

This paper exposes the way in which the decomposition of Locational Marginal Prices (PML) is constructed into its energy and congestion components using the envelope theorem. PML is perhaps the most widely used methodology around the world to determine energy prices, and one of the best-known concepts of this clearing mechanism is its decomposition into the sum of two or three components, depending on the model used; however, why this happens is less well understood. For this reason, in this document a formal, but simple justification of the construction of such a decomposition is provided.

Index terms: locational marginal prices, envelope theorem, economic dispatch, mexican electricity market.

I. INTRODUCCIÓN

Las primeras menciones del concepto de precios marginales locales se tienen a finales de los 80 y luego a principios de los 90, con los trabajos de Schweppe et al. [1], [2] y W. Hogan [3], respectivamente. Desde ese momento y hasta la actualidad, esto ha sido ampliamente estudiado dentro de la literatura [4], [5], [6], [7], [8], [9],[10]. Derivado de toda esta experiencia acumulada, entre otras cosas, se sabe que:

a) Cuando se omiten los efectos de congestión y pérdidas en la red, el valor del PML es único para todos los nodos del sistema y coincide con el valor de la oferta de la última Unidad de Central Eléctrica (UCE) despachada que tenga capacidad de suministrar un MW extra de potencia a la red [5].
b) Cuando se consideran los efectos de congestión o pérdidas, los valores de los PML en general son distintos en los diferentes nodos del sistema [6].
c) Bajo los supuestos del inciso anterior, el PML es la suma de:
    a. Una componente marginal de energía (en general esta componente no representa el precio de la energía sin congestión ni pérdidas, sino que se trata del PML en el nodo de referencia; de hecho, la componente de energía es la misma para todos los nodos del sistema [4]).
    b. Una componente marginal de congestión (representa el incremento en el costo por el redespacho de generación requerido para no violar un límite de transmisión).
    c. Una componente marginal de pérdidas (representa el incremento marginal por nodo en las pérdidas del sistema causada por un pequeño cambio en las inyecciones o retiros de energía) [7].
d) Los componentes de los PML dependen de la selección del nodo de referencia, pero el resultado de la suma de ellos es independiente de dicha selección [4], [6].

De lo anterior, el tema quizá más ampliamente conocido es la descomposición de los PML [7], [8], [9], [10]. Sin embargo, la razón por la cual se tiene tal descomposición, no lo es tanto. No obstante que se pueden tener ideas de la justificación en [6], [11], [12], [13] y más recientemente en [14], al no ser el objetivo de dichos trabajos, la explicación no es suficiente o contiene demasiada carga matemática que podría llegar a dificultar su deducción. Es por ello que en este trabajo se muestra de una forma sencilla, pero formal, la construcción de dicha descomposición.

El presente artículo está estructurado como sigue: en la sección II se describen algunas ideas generalizadas que se tienen acerca de los PML, lo cual da la motivación y sentido al objetivo de este trabajo. La sección III provee de la herramienta matemática que se aplica en la construcción de la descomposición de los PML, el teorema de la envolvente; se enuncia y demuestra el teorema para los casos sin restricciones, y se enuncia el teorema para el caso con restricciones. En la sección IV se muestran distintos modelos de despacho y se describe cómo se obtienen los PML a partir de la aplicación del teorema de la envolvente. Finalmente, en la sección V se dan las conclusiones.

II. MOTIVACIÓN DEL PROBLEMA

El concepto de los Precios Marginales Locales involucra la forma en la que cambia el costo total *óptimo* de operación de un sistema de potencia con respecto al cambio en la demanda; es decir, una vez que se tiene definido el despacho óptimo de generación para un escenario de demanda, se debe investigar cuál sería la variación en el costo total obtenido si dicho escenario de demanda cambia de forma marginal. Nótese que lo anterior no se resuelve estudiando la derivada de la función objetivo con respecto a una variable, sino que, a partir del valor óptimo obtenido, se trata de conocer cómo cambiaría dicho valor cuando cambia el valor de un parámetro del problema; en este caso, la demanda.

Una noción muy generalizada del concepto de Precios Marginales Locales es que se trata de las variables duales del problema. En estos términos, el PML sería igual a λ, donde λ denota el valor de la variable dual de la ecuación de balance de potencia de un modelo de despacho uninodal, en el cual a partir de un conjunto de UCE denotado por U, la suma de la potencia generada por cada UCE conectada al nodo (único), debe satisfacer la demanda total en el nodo, P_D:

$$\sum_{i \in U} P_{G_i} = P_D : \lambda$$

Lo anterior tiene su sustento debido a que el valor de las variables duales en un problema de optimización indica "el cambio en el valor de la función objetivo ante un cambio marginal en el valor del lado derecho de la restricción". Sin embargo, existen tantas variables duales como restricciones en el problema de optimización. Entonces, ¿cuál de todas ellas determina el PML? Es decir, una expresión válida para los PML es, por ejemplo:

$$PML = \lambda - PTDF(\pi^{+} - \pi^{-}) \tag{1}$$

donde tanto λ, π^{+} y π^{-} son algunas variables duales del problema de despacho y PTDF se refiere a los valores de los factores de distribución de transferencia de potencia. En específico, π^{+} y π^{-} se refieren a las variables duales de las restricciones de flujo máximo y mínimo en las líneas de transmisión.

Más aún, los PML en el Mercado Eléctrico Mayorista (MEM) de México se calculan con [15]:

$$PML_{n,t} = \lambda_t + \sum_{br \in BR} \underline{\delta}_{br,t}\, sfbr_{br,n,t} - \sum_{br \in BR} \overline{\delta}_{br,t}\, sfbr_{br,n,t} - X_{t,k}\, sper_{n,t}^{k-1} \tag{2}$$

donde $\lambda, \underline{\delta}, \overline{\delta}\ y\ X$, son todas, variables duales del modelo de despacho y asignación de unidades del MEM.

De esto es evidente que la aseveración de que los PML son las variables duales del problema, es al menos una afirmación incompleta o que es válida sólo para ciertos casos particulares. Entonces, ¿cómo se construye una expresión para los PML como la dada en (1) o (2)? y ¿por qué se dividen de tal manera? La clave para la respuesta a estas preguntas está en la definición de los Precios Marginales Locales. Sin embargo, para estudiarlos, se requiere un andamiaje matemático que permita describir el cambio del valor óptimo de un problema de optimización con respecto a un parámetro. Ese armamento matemático para estudiar esta tasa de variación tan particular para conocer los PML lo da el *teorema de la envolvente*, y ayudará a revelar cómo se construyen (y no simplemente la forma en la que se calculan) las expresiones (1) y (2).

III. TEOREMA DE LA ENVOLVENTE

De manera general, los problemas de optimización dependen de un conjunto de variables de decisión. Ejemplos de esto puede ser la minimización de una parábola $G(x) = x^2$ o de un paraboloide $H(x, y) = x^2 + y^2$, que dependen de una y dos variables de decisión, respectivamente.

Sin embargo, existen algunos problemas en los que la función objetivo (f.o.) o las restricciones dependen además de una serie de parámetros. Un ejemplo sencillo de esto último es la minimización de una función objetivo (sin restricciones) representada por $F(x; \beta) = x^2 - 4\beta x + \beta$ en la que ésta depende de una única variable de decisión x y de un único parámetro β. Note que, en este caso el valor mínimo que alcance esta función dependerá del valor óptimo de la variable x que, a su vez, dependerá del valor del parámetro β. Por ejemplo, F alcanza el valor mínimo de -3 en el óptimo $x^* = 2$. Pero ambas cosas suceden cuando β vale 1. Si ahora β = 2, entonces $x^* = 4$ y el valor mínimo de la f.o. es -14, y así sucesivamente. Es claro que, si el valor del parámetro β cambia, entonces el óptimo y el valor mínimo de la f.o. también lo harán, así que podemos decir que x^* es una función del parámetro, *i.e.*, $x^* = x^*(\beta)$, y podemos definir también la *función de mínimo valor* o *función objetivo-indirecta* como $V(\beta) = F(x^*(\beta);\ \beta)$, que es la función que dará el valor mínimo que se obtendría para cada valor de β. Para la función F del ejemplo, se tiene de las condiciones de primer orden que $2x - 4\beta = 0$, de donde $x^*(\beta) = 2\beta$, y la función de mínimo valor es $V(\beta) = F(x^*(\beta);\ \beta) = (2\beta)^2 - 4\beta(2\beta) + \beta = -4\beta^2 + \beta$. Es decir, para cada β, F es una parábola con un mínimo en 2β y un valor mínimo de $-4\beta^2 + \beta$.

Ahora que se ha caracterizado con una función (función objetivo-indirecta) la forma en la que se comporta el valor mínimo de la f. o., se puede saber la forma en la que éste cambia cuando cambia un parámetro, calculando $\frac{dV(\beta)}{d\beta}$. Sin embargo, es posible evitar la construcción de la función objetivo-indirecta y el posterior cálculo de su derivada, utilizando el teorema de la envolvente.

Para enunciar, demostrar y ejemplificar los teoremas, considere el siguiente problema general de optimización de varias variables con *M = 1, 2, …, m*, restricciones.

$$\min_{x \in \mathbb{R}^N} \quad f(x;\ \beta) \qquad (3)$$

$$\text{Sujeta a: } g_M(x;\ \beta) = b_M$$

A. Teorema de la envolvente (sin restricciones)

Para este primer teorema, se supondrá la relajación de (3) a un problema sin restricciones con una única variable y un único parámetro, *i. e.*,

$$\min_{x \in \mathbb{R}} f(x;\ \beta)$$

Teorema 1. Suponga que para cada valor del parámetro β, la función $f(x;\ \beta): R \to R$ es derivable y alcanza un mínimo (que es único) en $x^*(\beta)$ que, a su vez, es una función derivable de β. Entonces, la función objetivo-indirecta $V(\beta)$ es derivable, y su variación debida a la variación en el parámetro está dada por:

$$\frac{dV(\beta)}{d\beta} = \frac{\partial f(x;\ \beta)}{\partial \beta}\Big|_{x^*(\beta)}$$

Demostración. Como $V(\beta) = F(x^*(\beta);\ \beta)$, de la regla de la cadena:

$$\frac{dV(\beta)}{d\beta} = \frac{\partial f(x;\ \beta)}{\partial x}\Big|_{x^*(\beta)} \frac{dx(\beta)}{d\beta} + \frac{\partial f(x;\ \beta)}{\partial \beta}\Big|_{x^*(\beta)}$$

Como *f* alcanza el óptimo en $x^*(\beta)$, se debe cumplir que $\frac{\partial f(x;\ \beta)}{\partial x}\Big|_{x^*(\beta)} = 0$. De modo que:

$$\frac{dV(\beta)}{d\beta} = \frac{\partial f(x;\ \beta)}{\partial \beta}\Big|_{x^*(\beta)}$$

■

Es decir, se debe calcular el óptimo del problema (condiciones de primer orden) y evaluarlo en la derivada parcial de la f.o. con respecto al parámetro. Para el ejemplo de la minimización de la función objetivo *F* que se ha trabajado hasta ahora, se tiene que $x^*(\beta) = 2\beta$, como $\frac{\partial F(x;\,\beta)}{\partial \beta} = -4x + 1$, la variación del valor mínimo ante una variación del parámetro estará dada por:

$$\frac{dV(\beta)}{d\beta} = [-4x + 1]_{2\beta} = -8\beta + 1$$

B. Teorema de la envolvente (con restricciones)

En esta subsección se enunciará el teorema de la envolvente para el problema (3) con *N* variables, *S* parámetros y *M* restricciones.

Teorema 2. Considere la función de valor $V(\beta)$ para el problema (3), suponga que es derivable en cierto vector de parámetros $\bar{\beta} \in \mathbb{R}^S$ y que $(\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_M)$ son los valores de los multiplicadores de Lagrange asociados a la *x* óptima en $\bar{\beta}$, $x^*(\bar{\beta})$. Entonces, para toda i = 1, …, S, se cumple que:

$$\frac{\partial V(\bar{\beta})}{\partial \beta_i} = \frac{\partial f(x(\bar{\beta});\, \bar{\beta})}{\partial \beta_i} - \sum_{m=1}^{M} \lambda_m \frac{\partial g_m(x(\bar{\beta});\, \bar{\beta})}{\partial \beta_i}$$

Demostración, véase [16], pp. 965.

Note que el lagrangiano del problema de optimización completo dado por (3), es:

$$L = f(x;\, \beta) - \sum_{i \in M} \lambda_i \,[\, g_i(x;\, \beta) - b_i \,]$$

de modo que el lado derecho de la igualdad en el teorema 2 se puede ver como la derivada parcial del lagrangiano del problema de optimización con respecto al parámetro, evaluado en el punto óptimo.

IV. PRECIOS MARGINALES LOCALES

A partir de tres modelos distintos, en esta sección se presentará la forma en la que se construyen los PML. El primer modelo es un modelo uninodal en donde toda la generación y cargas se encuentran conectados a un mismo y único nodo. A pesar de ser un modelo extremadamente simplificado, se utilizará como base para mostrar la forma en la que se construyen los PML. Posteriormente, se extenderán los conceptos a dos modelos que consideran la red y que pueden describir los efectos de la congestión en el precio nodal sólo diferenciados por la forma en la que se calculan los flujos. El primer modelo que considera la red será un modelo con un equivalente de CD, mientras que el segundo será uno que use PTDF.

Los Precios Marginales Locales se definen para cada nodo como: el incremento marginal en el costo de operación óptimo del sistema que se genera por suministrar un incremento –también marginal– de demanda en el nodo (normalmente de 1 MW), en otras palabras, son la tasa de variación del costo de operación óptimo con respecto a la variación en la demanda y será esta definición, junto con la aplicación del teorema de la envolvente, la clave de la construcción de los PML.

A. Despacho uninodal

En este problema, se tiene un conjunto U de UCE y un conjunto de cargas conectadas a un único nodo. El costo total de operación se puede modelar como la suma de los costos de todas las UCE, es decir, $\sum_{i \in U} C_i(P_{G_i})$, donde C_i es la función de costos de generación de cada UCE conectada al sistema (normalmente funciones cuadráticas con coeficientes cuadrático, lineal y constante, c_i^q, c_i^l y c_i^b, respectivamente). El despacho de generación debe cumplir el balance de potencia en el nodo, *i. e.*, que la suma de la potencia generada de cada UCE conectada al nodo, P_{G_i}, satisfaga la demanda total, P_D. Así, considerando que todas las UCE no tienen límites de generación y que se tiene un parámetro β que modele la variación marginal en la demanda total, se tiene el siguiente modelo de optimización:

$$\min_{P_G} \quad \sum_{i \in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b$$

Sujeta a:

$$\sum_{i \in U} P_{G_i} = P_D + \beta \tag{4}$$

Al contar con una sola restricción, el lagrangiano contiene un único multiplicador de Lagrange (λ), y se escribe como:

$$L = \left[\sum_{i \in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b\right] - \lambda \left[\sum_{i \in U} P_{G_i} - (P_D + \beta)\right]$$

Las condiciones de optimalidad de primer orden para este problema quedan:

$$\frac{\partial L}{\partial P_{G_i}} = 0 \quad i \in U$$
$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 0$$

Resolviendo el sistema de ecuaciones con el valor particular de $\beta = 0$ (escenario base de la demanda), se obtiene la solución óptima $\left(P_{G_i}^*, \lambda^*\right)$.

Note que el lagrangiano se escribe como:

$$L = \left[\sum_{i \in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b\right] - \lambda \sum_{i \in U} P_{G_i} + \lambda P_D + \lambda \beta$$

Entonces, si V es la función objetivo-indirecta para el problema de optimización (4), y si se quiere investigar la variación de V con respecto a la variación marginal en la demanda (parámetro), del Teorema 2 de la envolvente:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta} = \left.\frac{\partial L(P_{G_i}, \lambda;\ \beta)}{\partial \beta}\right|_{\left(P_{G_i}^*, \lambda^*\right)} = \lambda|_{\left(P_{G_i}^*, \lambda^*\right)}$$

de modo que:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta} = \lambda^*$$

Es decir, *la variación en el costo total óptimo de operación debido a la variación marginal en la demanda* (en otras palabras, el PML) para el modelo del despacho uninodal (4), está dado por el multiplicador de Lagrange, λ, correspondiente a la ecuación de balance de potencia. Y en efecto, en este caso se cumple que el PML es la variable dual de la ecuación de balance de potencia.

A manera de resumen, dado un modelo de despacho, la construcción de los PML usando el teorema de la envolvente sigue los siguientes pasos:

1. Construir el lagrangiano.
2. Establecer las condiciones de optimalidad de primer orden para el problema.
3. Resolver el sistema de ecuaciones con $\beta = 0$ (escenario base de la demanda).
4. Calcular la derivada parcial del lagrangiano con respecto a la variación en la demanda.
5. Evaluar la solución óptima en el resultado de la derivada parcial obtenida en el punto anterior.

B. Despacho sin pérdidas considerando la red (Modelo de CD)

Para este primer modelo considerando la red (sin pérdidas), se hará uso de un modelo de CD para el cálculo de los flujos en la red. En este caso, el balance de potencia en cada nodo debe considerar el total de la suma de las inyecciones de potencia al nodo *k* (generación más inyección desde otros nodos a través de líneas de transmisión) y el total de la suma de las extracciones en ese mismo punto (demanda más envíos de potencia desde el nodo k hacia otros puntos del sistema a través de líneas de transmisión), es decir:

$$\sum_{i \in U_k} P_{G_i} + \sum_{(l,k)\in J} f_{lk} = P_{D_k} + \sum_{(k,l)\in J} f_{kl}\,; \quad k \in B$$

donde *B* es el conjunto de nodos, U_k el conjunto que contiene las UCEs conectadas al nodo *k*, *J* el conjunto de ramas[1], y f_{kl} es el flujo de potencia en la rama *(k, l)*. Al tratarse de un modelo equivalente de CD, el flujo de potencia para cada rama se calcula como [17]:

$$f_{kl} = \frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}}; \quad (k,l) \in J$$

donde θ_k es el ángulo de fase en el nodo *k* y x_{kl} es la reactancia de la rama *(k, l)*.

Si el flujo en cada rama se encuentra limitado tanto inferior como superiormente por los límites térmicos $\underline{f}_{kl}$ y $\overline{f}_{kl}$, respectivamente, se tiene:

$$\underline{f}_{kl} \le f_{kl} \le \overline{f}_{kl}; \quad (k,l) \in J$$

Análogamente, considerando límites en la generación de cada UCE:

$$\underline{P}_{G_i} \le P_{G_i} \le \overline{P}_{G_i}; \quad i \in U$$

De este modo, una formulación de despacho sin pérdidas considerando un modelo de flujos de CD se puede escribir como:

[1] Una rama es una trayectoria disponible entre un par de nodos en donde se encuentra al menos una línea de transmisión.

$$\min_{P_G,\theta} \quad \sum_{i\in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b$$

Sujeta a:

$$\sum_{(k,l)\in J} f_{kl} - \sum_{(l,k)\in J} f_{lk} = \sum_{i\,\in\,U_k} P_{G_i} - (P_{D_k} + \beta_k); \quad k \in B$$

$$\underline{f}_{kl} \leq \frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}} \leq \overline{f}_{kl}; \quad (k,l) \in J \tag{5}$$

$$\underline{P}_{G_i} \leq P_{G_i} \leq \overline{P}_{G_i}; \quad i \in U$$

En esta formulación (5), el parámetro β_k modela la variación marginal en la demanda del total de las cargas conectadas al nodo k, P_{D_k}.

Siguiendo la secuencia para la construcción de los PML señalada en la subsección anterior, se observa que, en este caso, el lagrangiano contiene k multiplicadores, λ_k, debido a las restricciones de balance (una por cada nodo), card(J) multiplicadores $\bar{\mu}_{kl}$ debido a las restricciones de máximo flujo, card(J) multiplicadores $\underline{\mu}_{kl}$ debido a las restricciones de mínimo flujo, card(U) multiplicadores $\bar{\tau}_i$ debido a las restricciones de potencia máxima de generación y card(U) multiplicadores $\underline{\tau}_i$ debido a las restricciones de potencia mínima de generación. Así, la función Lagrangiana para el problema de optimización (5) es:

$$L = \sum_{i\in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b - \sum_{k\in B} \lambda_k \left[\sum_{i\in U_k} P_{G_i} - \left(P_{D_k} + \beta_k\right) - \left(\sum_{(k,l)\in J} f_{kl} - \sum_{(l,k)\in J} f_{lk}\right)\right]$$
$$- \sum_{(k,l)\in J} \bar{\mu}_{kl}\left[\overline{f}_{kl} - \frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}}\right] - \sum_{(k,l)\in J} \underline{\mu}_{kl}\left[\frac{\theta_k - \theta_l}{x_{kl}} - \underline{f}_{kl}\right] - \sum_{i\in U} \bar{\tau}_i\left[\overline{P}_{G_i} - P_{G_i}\right] - \sum_{i\in U} \underline{\tau}_i\left[P_{G_i} - \underline{P}_{G_i}\right]$$

Estableciendo las condiciones de optimalidad de primer orden (las derivadas parciales del lagrangiano con respecto a cada variable igual a cero) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante con $\beta_k = 0 \ \forall\ k \in B$ (escenario base de la demanda), se obtiene la solución del problema que, de manera compacta se puede escribir como $(P_G^*, \theta^*, \lambda^*, \mu^*, \tau^*) = \Psi^*$.

Observando la distribución de términos en el lagrangiano y si V es la función objetivo-indirecta para el problema de optimización (5), del Teorema 2 de la envolvente:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta_k} = \left.\frac{\partial L(\Psi;\ \beta)}{\partial \beta_k}\right|_{\Psi^*} = \lambda_k|_{\Psi^*}$$

De modo que:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta_k} = \lambda_k^*$$

Es decir, *la variación en el costo total óptimo de operación debido a la variación marginal en la demanda del k-ésimo nodo* (PML_k) para el modelo de despacho de CD (5), está dado por el multiplicador de Lagrange, λ_k, correspondiente a la ecuación de balance de potencia del nodo k, y también se cumple que los PML están dados por las variables duales de cada ecuación de balance de potencia.

C. Despacho sin pérdidas considerando la red (Modelo usando PTDF)

Una alternativa para el cálculo del flujo en ramas que se deriva del modelo de CD es el de factores de distribución de transferencia de potencia (PTDF), que representan la sensibilidad en el flujo de una línea ante un cambio en la transferencia de potencia entre dos nodos [17]. Usando los PTDF, el flujo en la rama *(k, l)* se puede calcular con:

$$f_{(k,l)} = \sum_{i \in B} PTDF_{(k,l)}^{i} \left[P_{G_i} - P_{D_i} \right]; \quad (k,l) \in J$$

Entonces, la formulación de despacho considerando un modelo con PTDF para la red, queda:

$$\min_{P_G} \quad \sum_{i \in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b$$

Sujeta a:

$$\sum_{i \in B} P_{G_i} = \sum_{i \in B} (P_{D_i} + \beta_i)$$

$$\sum_{i \in B} PTDF_{(k,l)}^{i} \left[P_{G_i} - (P_{D_i} + \beta_i) \right] \leq \overline{f}_{kl}; \quad (k,l) \in J \tag{6}$$

$$\sum_{i \in B} PTDF_{(k,l)}^{i} \left[P_{G_i} - (P_{D_i} + \beta_i) \right] \geq \underline{f}_{kl}; \quad (k,l) \in J$$

$$\underline{P}_{G_i} \leq P_{G_i} \leq \overline{P}_{G_i}; \quad i \in U$$

En esta formulación (6), cada parámetro β_i modela la variación marginal en la demanda del total de las cargas conectadas al nodo i, P_{D_i}.

La función lagrangiana para este problema de optimización es:

$$L = \sum_{i \in U} c_i^q P_{G_i}^2 + c_i^l P_{G_i} + c_i^b - \lambda \left[\sum_{i \in B} P_{G_i} - (P_{D_i} + \beta_i) \right]$$

$$- \sum_{(k,l) \in J} \overline{\mu}_{kl} \left[\overline{f}_{kl} - \sum_{i \in B} PTDF_{(k,l)}^{i} \left[P_{G_i} - (P_{D_i} + \beta_i) \right] \right] - \sum_{(k,l) \in J} \underline{\mu}_{kl} \left[\sum_{i \in B} PTDF_{(k,l)}^{i} \left[P_{G_i} - (P_{D_i} + \beta_i) \right] - \underline{f}_{kl} \right]$$

$$- \sum_{i \in U} \overline{\tau}_i \left[\overline{P}_{G_i} - P_{G_i} \right] - \sum_{i \in U} \underline{\tau}_i \left[P_{G_i} - \underline{P}_{G_i} \right]$$

Procediendo de la misma manera que en los anteriores modelos, se obtiene la solución del problema, que se puede escribir como $(P_G^*, \lambda^*, \mu^*, \tau^*) = \Phi^*$, y:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta_i} = \left. \frac{\partial L(\Phi;\, \beta)}{\partial \beta_i} \right|_{\Phi^*}$$

De modo que:

$$\frac{\partial V(\beta)}{\partial \beta_i} = \lambda^* + \sum_{(k,l)\in J} \underline{\mu}_{kl}^* \, PTDF_{(k,l)}^i - \sum_{(k,l)\in J} \overline{\mu}_{kl}^* \, PTDF_{(k,l)}^i \qquad (7)$$

Es decir, la variación en el *costo total óptimo de operación debido a la variación marginal en la demanda del i-ésimo nodo* (PML_i) para el modelo de despacho usando PTDF (6), está dado por la suma de dos componentes:

- una componente (*componente marginal de energía*) dada por el multiplicador de Lagrange, λ, correspondiente a la ecuación de balance de potencia (note que esta componente es la misma para cualquier nodo); y
- una componente (*componente marginal de congestión*) dada por el término.

$$\sum_{(k,l)\in J} \underline{\mu}_{kl}^* \, PTDF_{(k,l)}^i - \sum_{(k,l)\in J} \overline{\mu}_{kl}^* \, PTDF_{(k,l)}^i$$

Se puede observar que la expresión (7) que se ha obtenido aquí para el PML, coincide con la fórmula proporcionada en la ecuación (163) de la formulación matemática del modelo AU-MDA del Mercado Eléctrico Mayorista con la que se calculan los PML en México [15], excepto por la componente marginal de pérdidas, las cuales no se consideraron en este trabajo.

Si se revisan los resultados del mercado mexicano en el portal público del Sistema de Información del Mercado [18], correspondientes a los precios de energía y servicios conexos MDA, se puede observar que para cada hora, la componente marginal de energía es la misma para los 2403 nodos que componen el Sistema Interconectado Nacional (SIN), también para los 113 nodos que componen el Sistema de Baja California (BCA) y para los 30 nodos que componen el sistema de Baja California Sur (BCS) al día de operación del 23 de diciembre de 2022; por ejemplo, para la hora 1 de ese día, dicha componente tuvo un valor de 1032.97 $/MWh, 5140.78 $/MWh y 2387.16 $/MWh, para todos los nodos del SIN, BCA y BCS, respectivamente [19]. Análogamente, se observa una componente marginal de energía de 960.72 $/MWh, 4854.54 $/MWh y de 2358.47 $/MWh, para cada sistema interconectado, respectivamente, y así para cada hora del día.

V. Conclusiones

En este trabajo se ha mostrado la forma en la que se construyen los PML para tres distintos modelos. En el primer modelo se demuestra que bajo las simplificaciones de un modelo uninodal, el PML está dado por el multiplicador de Lagrange de la –única– ecuación de balance. En el segundo modelo, dado por una formulación que considera la red con un equivalente de CD, se demuestra que el PML en cada uno de sus nodos está dado por el multiplicador de Lagrange de cada ecuación de balance que corresponde al nodo en cuestión. Finalmente, se ha presentado una última formulación considerando un modelo con PTDF para la red, en donde se demuestra y justifica la descomposición del PML en componentes, en este caso uno de energía y otro de congestión. Vale la pena señalar que con este último resultado se da un paso definitivo en la justificación de la fórmula para el cálculo de los PML en el Mercado Eléctrico Mayorista de México y otros mercados internacionales (que contienen las tres componentes), ya que, si se plantea un modelo que considere las pérdidas y con base en el teorema mostrado, la extensión es directa.

Como un subproducto del trabajo, se ha demostrado también que cuando los PML se descomponen, la componente de energía es la misma para todos los nodos; tal como se mencionó, esto se puede observar en los resultados que se encuentran en plataformas públicas no sólo de México sino de cualquier parte del mundo en el que se usen la metodología de precios marginales locales para el cálculo de los precios nodales del sistema eléctrico.

REFERENCIAS

[1] M. Caramanis, R. Bohn, F. Schweppe, "Optimal Spot Pricing: Practice and Theory," *IEEE Power Engineering Review*, vol. PER-2, no. 9, pp. 42-42, Sept. 1982, https://doi.org/10.1109/MPER.1982.5519479

[2] F. C. Schweppe, M. C. Caramanis, R. D. Tabors, R. E. Bohn, *Spot Pricing of Electricity*, Norwell, MA: Kluwer, 1988.

[3] W. W. Hogan, "Contract Networks for Electric Power Transmission," *J. Reg. Econ*., vol. 4, pp. 211-242, 1992.

[4] E. Litvinov, Tongxin Zheng, G. Rosenwald, P. Shamsollahi, "Marginal loss modeling in LMP calculation," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 19, no. 2, pp. 880-888, May 2004, https://doi.org/10.1109/TPWRS.2004.825894

[5] Y. Fu, Z. Li, "Different models and properties on LMP calculations," *IEEE Power Engineering Society General Meeting*, 2006, https://doi.org/10.1109/PES.2006.1709536

[6] X. Cheng, T. J. Overbye, "An energy reference bus independent LMP decomposition algorithm," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 21, no. 3, pp. 1041-1049, Aug. 2006, https://doi.org/10.1109/TPWRS.2006.876703

[7] F. Li, R. Bo, W. Zhang, "Comparison of Different LMP Calculations in Power Market Simulation," in *2006 International Conference on Power System Technology*, 2006, pp. 1-6, https://doi.org/10.1109/ICPST.2006.321838

[8] F. Li, R. Bo, "DCOPF-Based LMP Simulation: Algorithm, Comparison With ACOPF, and Sensitivity," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 22, no. 4, pp. 1475-1485, Nov. 2007, https://doi.org/10.1109/TPWRS.2007.907924

[9] Z. Yang *et al*., "LMP Revisited: A Linear Model for the Loss-Embedded LMP," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 32, no. 5, pp. 4080-4090, Sept. 2017, https://doi.org/10.1109/TPWRS.2017.2648816

[10] R. Singh, A. K. Singh, T. Tyagi, "Locational marginal pricing calculation using PTDF through load flow and conventional GSF: A comparative study," in *2018 IEEMA Engineer Infinite Conference (eTechNxT)*, 2018, pp. 1-6, https://doi.org/10.1109/ETECHNXT.2018.8385366

[11] L. Chen, H. Suzuki, T. Wachi, Y. Shimura, "Components of nodal prices for electric power systems," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 17, no. 1, pp. 41-49, Feb. 2002, https://doi.org/10.1109/59.982191

[12] A. J. Conejo, E. Castillo, R. Minguez, F. Milano, "Locational marginal price sensitivities," *IEEE Transactions on Power Systems*, vol. 20, no. 4, pp. 2026-2033, Nov. 2005, https://doi.org/10.1109/TPWRS.2005.857918

[13] H. Liu, L. Tesfatsion, A. A. Chowdhury, "Locational marginal pricing basics for restructured wholesale power markets," in *2009 IEEE Power & Energy Society General Meeting*, 2009, pp. 1-8, https://doi.org/10.1109/PES.2009.5275503

[14] L. Tang *et al*., "Analysis of Shadow Price of System Power Balance Constraint under Quasi-steady-state Sensitivity," in *2022 7th Asia Conference on Power and Electrical Engineering (ACPEE)*, 2022, pp. 501-506, https://doi.org/10.1109/ACPEE53904.2022.9784076

[15] J. L. Ceciliano, A. de la Torre, J. Álvarez, R. Nieva, "Formulación Matemática del Modelo de Asignación de Unidades con Restricciones de Seguridad y Cálculo de Precios Marginales Locales y de Servicios Conexos en el Mercado de un Día en Adelanto," 2016, available: https://www.cenace.gob.mx/Docs/MercadoOperacion/Formulaci%C3%B3n%20Matem%C3%A1tica%20Modelo%20AU-MDA%20y%20PML%20v2016%20Enero.pdf

[16] A. Mas-Colell, M. D. Whinston, J. R. Green, *Microeconomic Theory*, Oxford University Press, 1995.

[17] A. J. Wood, B. F. Wollenberg, G. B. Sheblé, Power Generation, *Operation, and Control*, 3ª ed., Wiley, 2013.

[18] Centro Nacional de Control de Energía. "Área Pública del SIM" ÁP-SIM. https://www.cenace.gob.mx/APSIM.aspx (accessed Dec. 23, 2022).

[19] Centro Nacional de Control de Energía. "Precios de energía y servicios conexos MDA" ÁP-SIM. https://www.cenace.gob.mx/Paginas/SIM/Reportes/PreEnerServConMDA.aspx