

# La ecuación discreta de Pocklington aplicada a la transformación de mediciones de campo cercano en campo lejano

Luis **Carrión-Rivera**<sup>1</sup>  
Jorge **Sosa-Pedroza**<sup>2</sup>  
Fabiola **Martínez-Zúñiga**<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Centro Nacional de Metrología  
Dispositivos Electromagnéticos y Antenas  
km 4.5 Carretera a Los Cués, Municipio El Marqués,  
CP 76246, Querétaro.  
MEXICO.

<sup>2</sup>Instituto Politécnico Nacional  
Escuela Superior de Ingeniería Mecánica y Eléctrica  
UPALM, Av. IPN, S/N, CP 07738, Ciudad de México.  
MEXICO.

Teléfono 57296000 ext 57609  
correos electrónicos (emails): lcarriónr@cenam.mx  
jsosa@ipn.mx  
fmartinezzu@ipn.mx

Recibido 15-12-2016, aceptado 28-03-2017.

## Resumen

Los sistemas actuales de comunicaciones móviles, de tecnología MIMO, requieren de antenas inteligentes capaces de utilizar favorablemente la multitrayectoria para mejorar la calidad de la señal deseada. Las antenas de las estaciones base 4G, actualmente en despliegue en el mundo y en particular en nuestro país, son en esencia un doble arreglo ortogonal, de dimensiones típicas de 1.4 m, con frecuencias de operación entre 1.7 y 2.7 GHz; estas dimensiones y su relación con la longitud de onda (el tamaño eléctrico de la antena), implica que la distancia mínima de medición de campo lejano es superior a los 25 m. Considerando que la caracterización debe hacerse en un medio controlado, es de suponerse el costo de una cámara anecoica de tales dimensiones. Presentamos en este trabajo una propuesta de conversión de medición en campo cercano usando la ecuación de Pocklington para obtener el campo lejano mediante la teoría de arreglos, a partir del cálculo de corrientes virtuales cerca de la antena.

**Palabras clave:** ecuación de Pocklington, ecuación discreta de Pocklington, antenas MIMO, conversión de campo cercano en campo lejano.

## Abstract (Near Field-Far Field Transformation Using the Discrete Pocklington Equation)

Actual MIMO technology needs special antennas capable to use multipath to improve signal quality. Antennas for the 4G base stations deployed around the World, are double orthogonal arrays working between 1.7 to 2.7 GHz and typical dimensions of 1.5 m length. Their dimension and wavelength relationship requires a minimum distance of 30 m for far field measurement. As measurement should be done in a controlled environment, as an anechoic chamber, those dimensions require a very high cost test set. We present in this paper a new proposal to obtain far field, measuring near antenna surface field to calculate virtual currents using Pocklington discrete equation; after that far field can be obtained using point sources.

**Index terms:** Pocklington equation, discrete Pocklington equation, near field-far field conversion, MIMO antennas.

## 1. Introducción

Uno de los problemas que se presentan en la caracterización de antenas, cuando las dimensiones del radiador son grandes, es la limitación del espacio de las cámaras anecoicas que establecen la restricción para que las mediciones sean válidas. El problema del error en las mediciones se debe a la diferencia de fase de la onda incidente sobre la antena bajo prueba (ABP) usada como receptora, o a los campos generados puntualmente, cuando la ABP se usa como transmisora, que producen múltiples fuentes esféricas con grandes diferencias de fase en una antena receptora. Las diferencias de fase y, en menor medida, las de amplitud, deforman el campo recibido que no describe el campo radiado a las grandes distancias prácticas en que se usa, debido a que la consideración de diagrama de radiación y ganancia suponen un frente de onda plano. De manera ilustrativa, las deformaciones pueden verse en la figura 1. Considerando lo anterior se han desarrollado varios métodos para corregir la diferencia de

fase en la medición de campo cercano. El más simple es el de la teoría de rayos, que implica hacer una corrección de fase, usando la ecuación de onda, suponiendo un frente de onda esférico sobre la ABP. Los sistemas modernos de conversión de campo cercano a campo lejano, hacen uso de la misma teoría [1], [2]; sin embargo en lugar de calcular mediante la teoría de rayos, miden módulo y fase del campo radiado, ya sea sobre un plano, un cilindro o una esfera, para corregirlas sobre un frente de onda plano. Es claro que la construcción de esos sistemas implica un costo de varios millones de dólares, que los hacen poco atractivos.

Proponemos en este trabajo una alternativa para obtener el diagrama de radiación de campo lejano, mediante la aplicación de la ecuación generalizada de Pocklington, para obtener la distribución de corriente en una antena mediante la medición de campo sobre su superficie. La propuesta no implica medir campo cercano sino calcular una distribución puntual de corrientes virtuales casi sobre la superficie de la antena a partir de la medición del módulo y fase del campo en la región de campo cercano. Obtenidas esas corrientes, se utilizarán como fuentes puntuales para calcular el campo lejano mediante la teoría de arreglos.

## 2. Limitaciones de distancia en la medición de antenas

Cuando el campo radiado por una antena se distribuye en el espacio, existen tres regiones que identifican el proceso (véase Fig. 1): la primera región se refiere al campo puntual individual, que implica que la radiación generada en cada punto no se ha mezclado con la de los demás, esta región se denomina

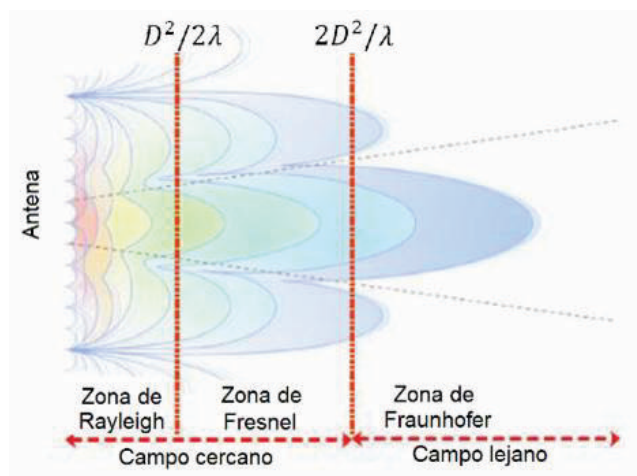


Fig. 1. Deformación del campo en función de la diferencia de fase de fuentes puntuales.

de Rayleigh; en la segunda, conocida como región de Fresnel, los campos individuales empiezan a interactuar entre ellos pero sus diferencias de fase son significativas, por lo que el diagrama de radiación no tiene la forma que deberá de adoptar en campo lejano; en la región 3 conocida como de Fraunhofer los campos se suman casi en fase, cuya diferencia se hace menor a medida que se alejan más de la fuente, y se conoce como región de campo lejano.

Formalmente se ha considerado que la distancia de transición entre las regiones 2 y 3, es aquella en que la diferencia máxima de fase no es mayor de  $\lambda/16$ , es decir,  $22.5^\circ$ . Es posible demostrar que la distancia mínima de transición con esa diferencia de fase está dada por:

$$d = \frac{2L^2}{\lambda} \quad (1)$$

Por ejemplo, supongamos que la dimensión mayor de una antena es de 1.2 m y que la frecuencia de operación es 1.5 GHz, la distancia mínima a la que puede considerarse campo lejano es de 14.4 m. A esta distancia se puede suponer un frente de onda plano, es decir que el campo medido tiene una fase igual en toda la región de medición.

Si se observa la figura 1 se puede deducir que, al principio de la región de Rayleigh, las fuentes pueden considerarse puntuales, sin influencia entre ellas, este hecho permite usarlas para calcular el campo lejano como la suma de campos generados por fuentes puntuales usando la teoría de arreglos. Si es posible definir las corrientes que los generan, entonces será posible obtener el campo radiado total de los efectos de la suma fasorial de los campos individuales. Esta es la idea fundamental de nuestro procedimiento. Para ello usamos la ecuación de Pocklington.

## 3. La ecuación de Pocklington

Durante mucho tiempo la caracterización de antenas se hizo por medio de métodos analíticos que presuponían su distribución de corriente o con complicados métodos experimentales que la medían. A partir de la invención de la computadora se han simplificado los procedimientos de análisis y síntesis no sólo en el caso de las antenas sino en muchos otros campos de la ciencia. La computadora ha tenido la virtud de revivir procesos antiguos, que tienen fundamento matemático incluso de siglos que han renacido posteriormente, debido a su capacidad de procesar gran cantidad de información con la rapidez práctica necesaria; uno de esos procesos antiguos es la ecuación de Pocklington definida en 1897 para antenas rectas [3].

La definición de la ecuación de Pocklington supone que la corriente en el conductor se concentra en un filamento en su superficie, de modo que el resto forma parte del medio de propagación [4]. Mediante la definición del campo tangencial usando cálculo vectorial, se puede generalizar la ecuación para conductores de forma arbitraria y después simplificarla mediante la reducción del núcleo de la integral, a fin de obtener una forma más sencilla que se traduce en ahorro de recursos de cómputo. La solución requiere únicamente de la definición de los vectores unitarios que describen la superficie y el eje del conductor en función de un sistema de coordenadas rectangulares (véase Fig. 2).

La figura 2 representa un conductor de forma arbitraria en un sistema de coordenadas rectangulares. Un punto en el centro del conductor queda definido por un sistema de coordenadas auxiliares  $(B, N, S)$  con sus respectivos vectores unitarios. A partir de ese nuevo sistema de coordenadas se localiza un punto en el espacio con coordenadas  $P(\rho, \phi, s)$ ; con estas definiciones es posible caracterizar el conductor de forma arbitraria, a partir de un vector unitario que describe su eje ( $s$ ) y otro un punto sobre su superficie ( $s'$ ). Bajo estas consideraciones, el campo muy cerca de la superficie (pero no sobre ella) puede obtenerse de la ecuación de Pocklington [5] dada por:

$$E_s^i = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \int \left[ R^2(k^2R^2 - 1 - jkR) s \cdot s' + (3 + 3jkR - k^2R^2)(R \cdot s)(R \cdot s') \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} l ds' \quad (2)$$

La expresión (2) se llama *ecuación generalizada de Pocklington* y representa el campo tangencial en un punto  $s$ , producido por todos los elementos de corriente  $s'$  del conductor. En la integral la corriente es desconocida, por lo que no puede resolverse

por métodos analíticos, pero sí mediante métodos iterativos. El cálculo debe hacerse para todos los puntos  $s$  sobre la superficie del conductor, lo que genera una matriz cuadrada que se resuelve usando el procedimiento conocido como Método de Momentos [6]. Para resolver la ecuación (2) se debe partir de la suposición de que el campo eléctrico tangencial sobre la antena es cero, excepto en el punto de alimentación, facilitando la solución. La propuesta es válida si se considera que la antena se construye de un conductor perfecto, con lo que se cumple con la condición de frontera de campo eléctrico tangencial cero sobre su superficie.

#### 4. Nuestra propuesta

Nuestra propuesta considera que la ecuación de Pocklington es válida no sólo en la superficie de la antena, sino también fuera pero cerca de ella, de modo que si es posible medir el campo en puntos cercanos, la corriente puntual se puede determinar resolviendo la ecuación (2) en forma discreta y no como integral.

El procedimiento que hemos desarrollado determina la corriente mediante la medición del campo en puntos específicos de la antena y considerando que la integral es discreta, convirtiéndose en una suma, dada por:

$$E_m^i = -\frac{1}{j\omega\epsilon} \sum_{n=1}^N \left[ R^2(k^2R^2 - 1 - jkR) s_m \cdot s'_n + (3 + 3jkR - k^2R^2)(R \cdot s_m)(R \cdot s'_n) \right] \frac{e^{-jkR}}{4\pi R^5} I_n \quad (3)$$

A excepción de la corriente, todos los elementos de la sumatoria se pueden determinar fácilmente de la geometría del sistema, de modo que puede construirse una matriz que tiene la forma:

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1N} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z_{M1} & Z_{M2} & \dots & Z_{MN} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} E_1 \\ E_2 \\ \vdots \\ E_M \end{bmatrix} \quad (4)$$

A partir de la ecuación (4) se obtiene la corriente puntual a lo largo de la estructura. Las  $Z_{mn}$  representan impedancias dadas por el factor que multiplica a la corriente en la ecuación (3) y que son constantes y fácilmente obtenidas a partir de los elementos geométricos de la estructura. La matriz de corrientes se resuelve multiplicando la matriz de campo eléctrico, obtenida mediante las mediciones, por la inversa de la matriz de impedancias.

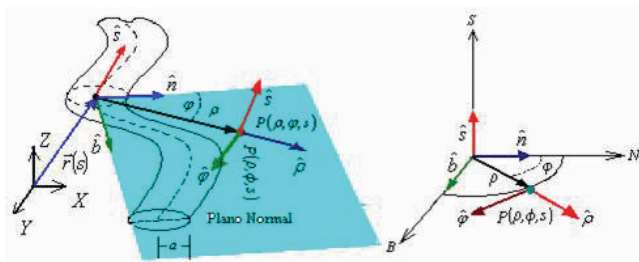


Fig. 2. Localización geométrica de un conductor de forma arbitraria.

Considérese, por ejemplo, la figura 3 con una antena de dimensiones adecuadas, se mide el campo  $E_m$  cerca de la Antena Bajo Prueba (ABP) en un número suficiente de puntos; usando las ecuaciones (3) y (4) se pueden calcular, en módulo y fase, las corrientes virtuales en cada punto de medición.

Una vez obtenidas las corrientes virtuales, se calcula el campo lejano usando la teoría de arreglos, bajo la consideración de que las corrientes calculadas representan un arreglo de elementos puntuales que generan ese campo lejano. El campo radiado por un arreglo de fuentes puntuales está dado por la ecuación (5):

$$E_T = E_0 \sum_{n=1}^M I_n e(j\beta nd(f(\theta, \phi)) + \alpha_n) \quad (5)$$

En (5)  $E_0$  representa el campo de una de las antenas del arreglo, en este caso de fuentes puntuales y cuyo valor se considera 1; la suma de los campos individuales de cada antena considera la diferencia de fase debida a la distancia y a la posición del punto de cálculo ( $\beta d$ ), definido por  $(\theta, \phi)$  y la fase relativa de la corriente respecto de la antena de referencia ( $\alpha$ ).

## 5. Experimento

El trabajo de experimentación fue hecho sobre una antena LTE de 1.4 m de longitud, trabajando entre 1.7 GHz y 2.7 GHz. La prueba de campo cercano se hizo en una cámara anecoica

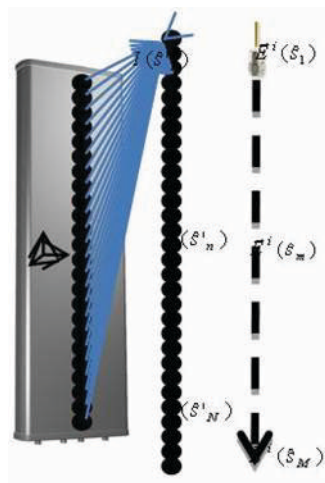


Fig. 3. Geometría de la medición.

a 4 m de distancia. Posteriormente, se usó una antena pequeña para medir el campo sobre la superficie del domo protector, como muestra la figura 3.

Una vez medido el campo, calculamos las corrientes virtuales usando la ecuación de Pocklington discreta (3) y finalmente el campo lejano usando la ecuación (5). La figura 4 muestra la comparación entre el campo cercano medido y el campo lejano calculado, para dos frecuencias específicas. El ángulo de  $0^\circ$  en las gráficas representa la referencia definida por el equipo de medición y de cómputo en la cámara anecoica, por lo que la dirección de máxima radiación del lóbulo principal es  $90^\circ$ . Se puede observar como el diagrama calculado afina el campo cercano, sobre todo haciendo más evidentes los cerros de campo y más angosto el lóbulo principal.

## 6. Medición de campo lejano

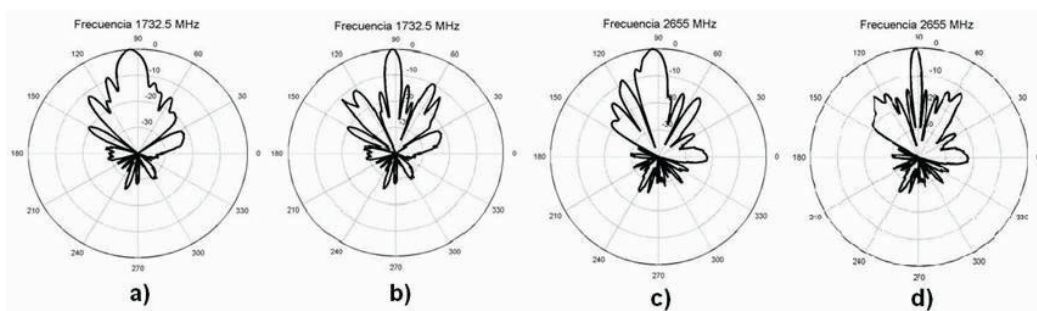
Para comprobar nuestro procedimiento, se hicieron mediciones de la misma antena en el Sitio de Calibración de Antenas del Centro Nacional de Metrología (CALTS-CENAM). Se entiende que, por ser un sistema abierto, es posible tener efectos de interferencia directa de otras antenas o de reflexiones en el proceso de medición; sin embargo, los resultados ilustran con claridad la exactitud del procedimiento propuesto, como se observa en las gráficas de la figura 5.

Es evidente la similitud entre los campos medidos y los calculados, existen pequeñas diferencias en los lóbulos secundarios, acentuadas en las frecuencias altas. Las diferencias se pueden deber a las características de la antena de detección, usada en el cálculo, o quizá a reflexiones o interferencias en el lugar de medición.

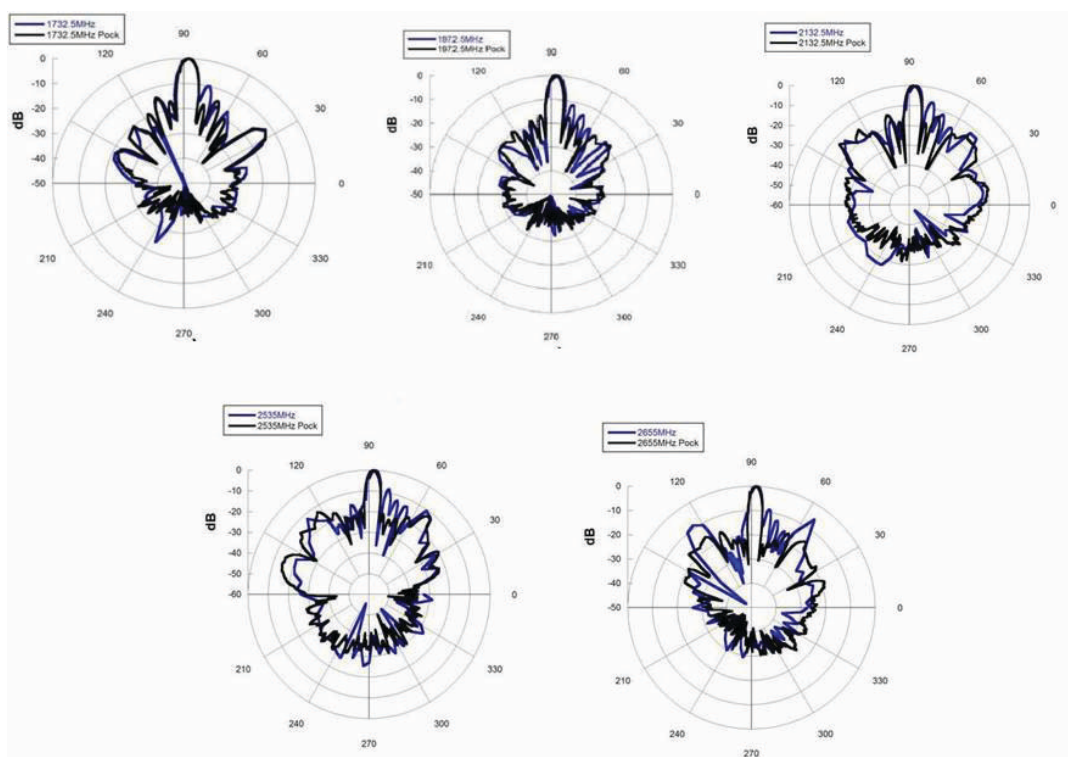
## 7. Conclusiones

Hemos presentado en este trabajo nuestra propuesta para obtener campo lejano a partir de la medición de campo en la región de Rayleigh de una antena cuyo diagrama de radiación se desconoce. El procedimiento define corrientes virtuales cerca de la antena para posteriormente usarlas para el cálculo de campo lejano mediante la teoría de arreglos. Los resultados comparados con mediciones de campo a distancias adecuadas, muestran una similitud que comprueba que el procedimiento es aceptablemente preciso. La reproducción del lóbulo principal es casi exacta, aunque existen diferencias, principalmente en los lóbulos laterales en algunas frecuencias; consideramos que esas diferencias se deben a que la antena de prueba no es del todo adecuada, estamos ahora desarrollando antenas que permitirán afinar el método.





**Fig. 4.** Diagramas de radiación a) Medido en campo cercano y b) Calculado para 1732.5 MHz; c) Medido en campo cercano y d) Calculado para 2655 MHz.



**Fig. 5.** Comparación de campo lejano medido (azul) y calculado (negro) para: a) 1732.5, b) 1972.5, c) 2132.5, d) 2535 y e) 2655 MHz.

## Referencias

- [1] D. Slater, *Near-Field Antenna Measurement*, Artech House Publishers, Norwood MA, USA, 1991.
- [2] S. Gregson, J. McCormick, & C. Parini, "Principles of Planar Near-Field Measurement," *IET Electromagnetics Wave Series* 53, London United Kingdom, 2007.
- [3] H. C. Pocklington, "Electric Oscillations in Wire," *Cambridge Philosophical Society Proceedings*, vol. 9, pp. 324-332, 1897.
- [4] V. Barrera-Figueroa, J. Sosa-Pedroza, & J. López-Bonilla, "Simplification of Pocklington's integral equation for arbitrary bent thin wires, Boundary Elements XXVII edition, (Electrical Engineering and Electromagnetics)," en Eds. A. Kassab, C. A. Brebbia, E. Divo, & D. Poljak. *WIT Trans. on Modelling and Simulation*, WIT Press, vol. 39, pp. 563-574, 2005.
- [5] C. Balanis, *Antenna Theory, Analysis and Design*, John Wiley and Sons, 1982.
- [6] R. F. Harrington, *Field Computation by Moment Methods*, McMillan, New York, 1968.